Università "Cardinale Giovanni Colombo" - Milano

A.A. 2024 - 2025

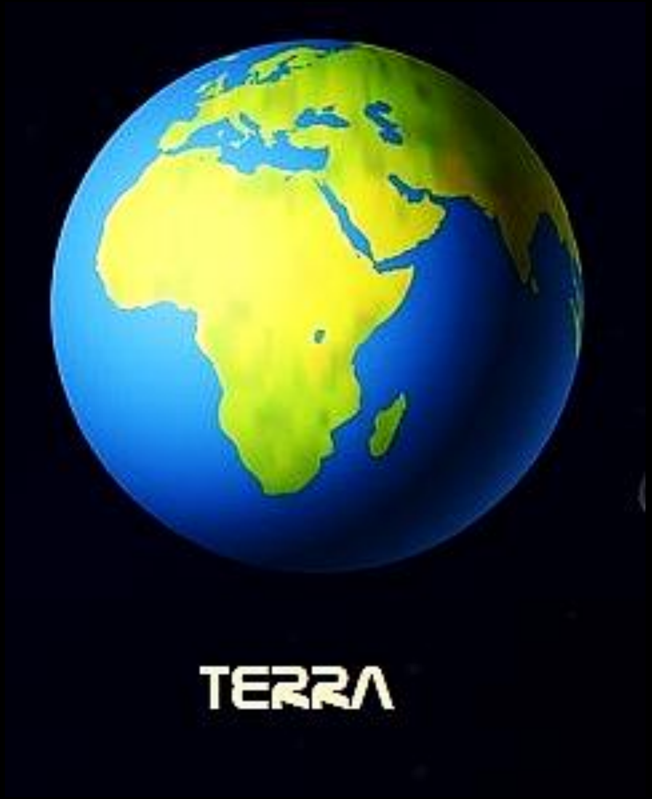
Corso di Astrofisica

Docente: **Adriano Gaspani**

Lezione 6

La Teoria della Gravitazione Universale di Newton

Pianeti conosciuti dall'antichità fino al XVIII secolo



Pianeti conosciuti dall'antichità fino al XVIII secolo

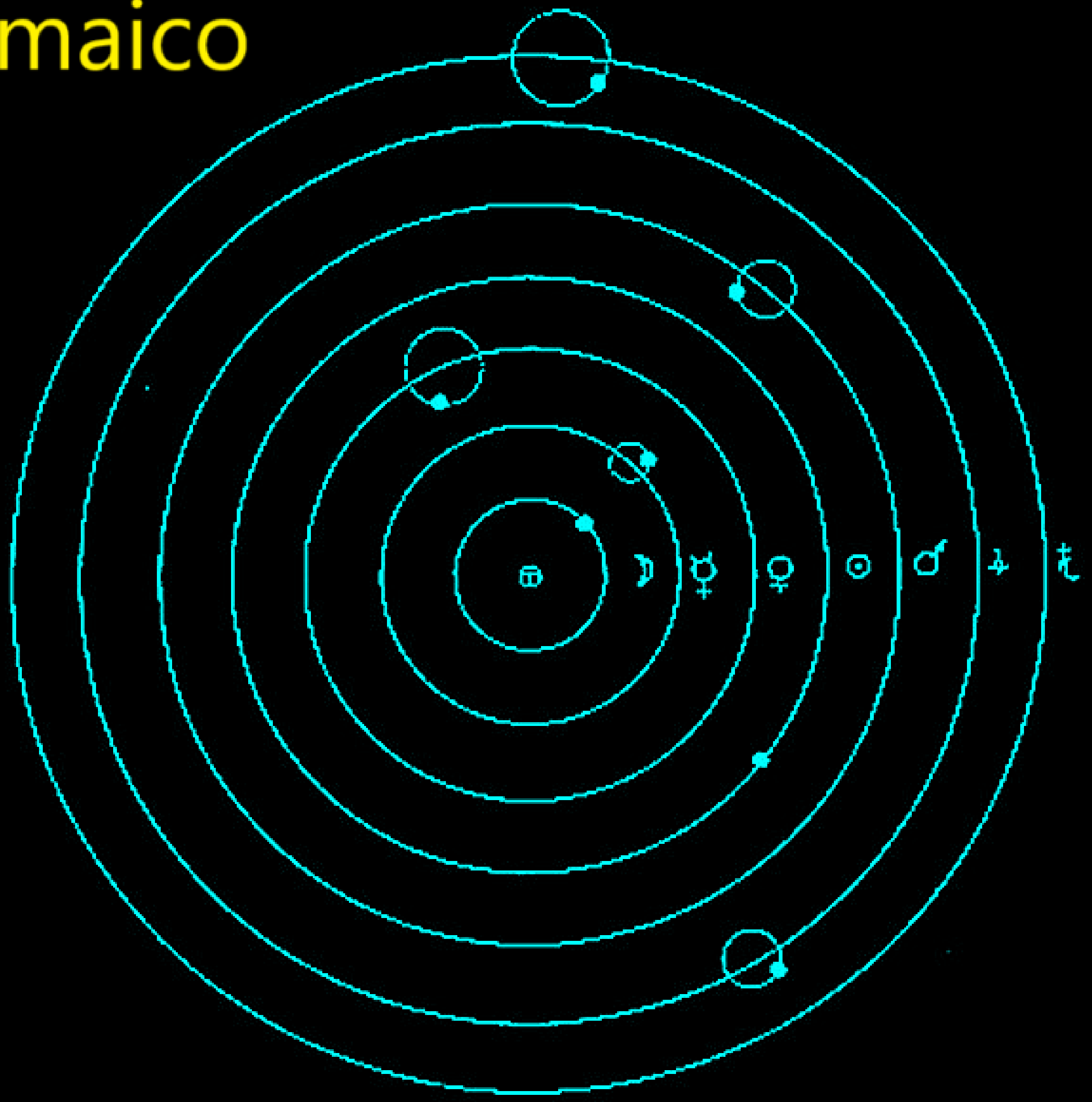
GRAVITAZIONE

CENNI STORICI

Ipotesi principali alla base del sistema geocentrico di Tolomeo:

1) la Terra è immobile al centro dell'Universo;
2) tutti gli astri (pianeti e stelle) ruotano intorno alla Terra;
3) i pianeti si spostano con velocità uniforme su traiettorie circolari (*epicicli*) i cui centri descrivono, a loro volta, orbite circolari (*deferenti*) a velocità costante;
4) Sole e Luna descrivono deferenti (senza epicicli) intorno alla Terra.

Il Sistema Tolemaico



Schema del sistema tolemaico.

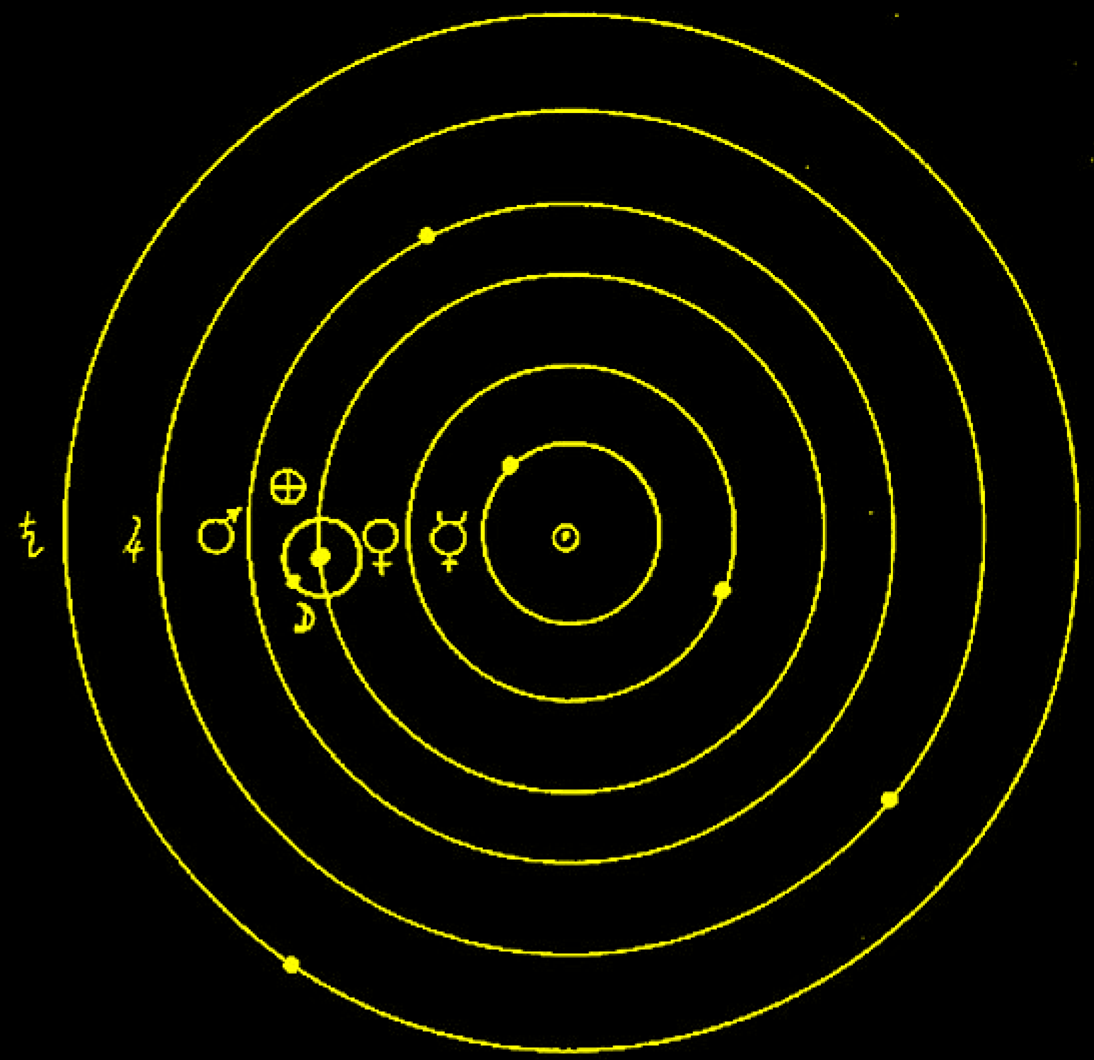
⊕ Terra, ☽ Luna, ☿ Mercurio, ♀ Venere, ☉ Sole, ♂ Marte. ♃ Giove. ♄ Saturno.

Il Sistema Copernicano

Ipotesi principali alla base del sistema eliocentrico di Copernico (1543):

1) il Sole, e non la Terra, è immobile al centro dell'Universo;
2) tutti gli astri (Terra compresa) ruotano intorno al Sole su traiettorie circolari percorse nello stesso verso e giacenti nello stesso piano;
3) tutti i pianeti (Terra compresa) sono sferici e ruotano intorno ad uno dei loro diametri;
4) la velocità con cui i pianeti si spostano sulle loro orbite è uniforme, ma i pianeti più vicini al Sole si spostano più velocemente di quelli più lontani.

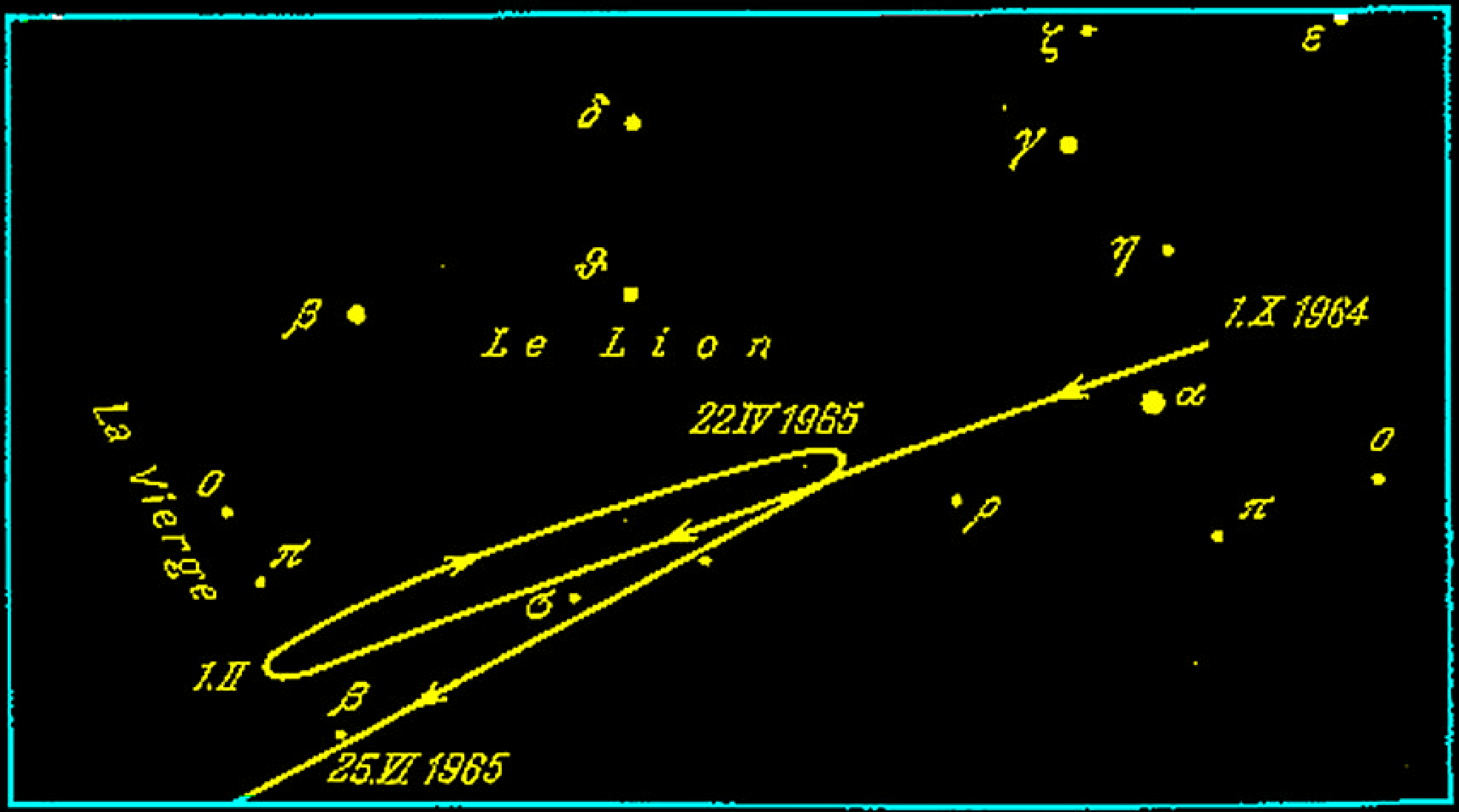
Il Sistema Copernicano



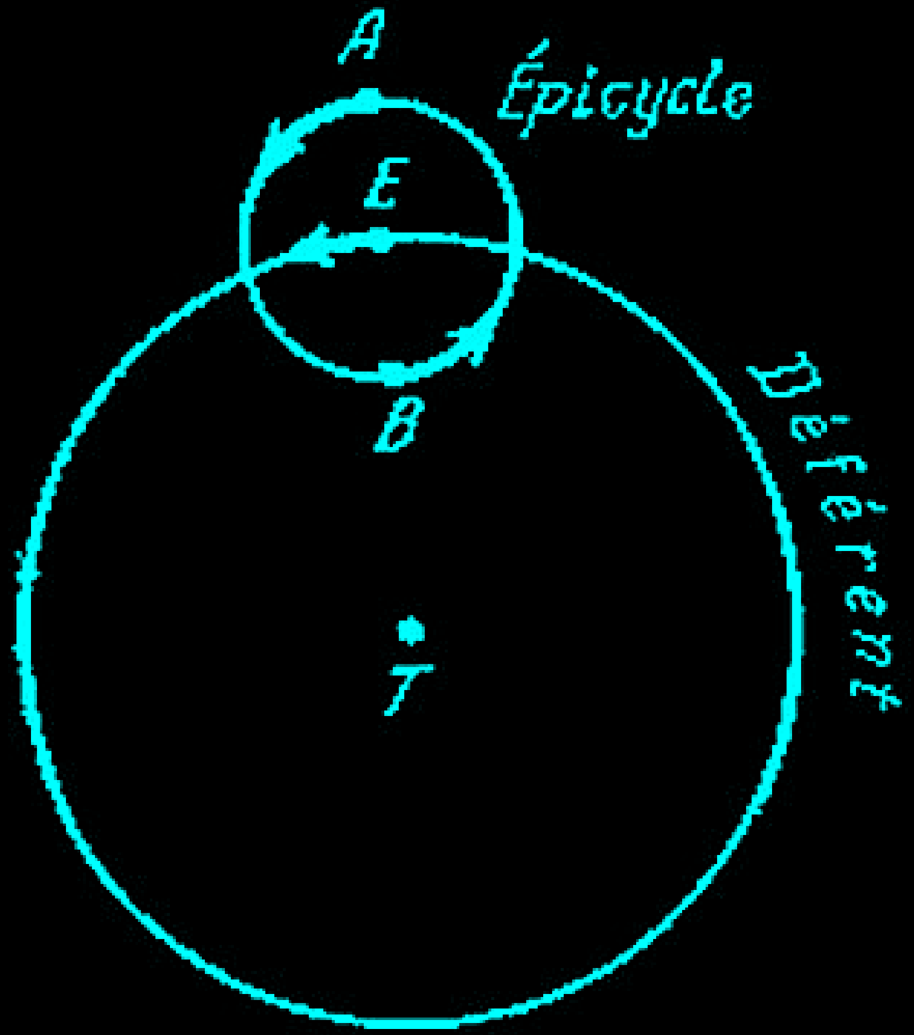
Schema del sistema copernicano.

⊕ Terra, ☽ Luna, ☿ Mercurio, ♀ Venere, ☉ Sole. ♂ Marte. ♃ Giove. ♄ Saturno.

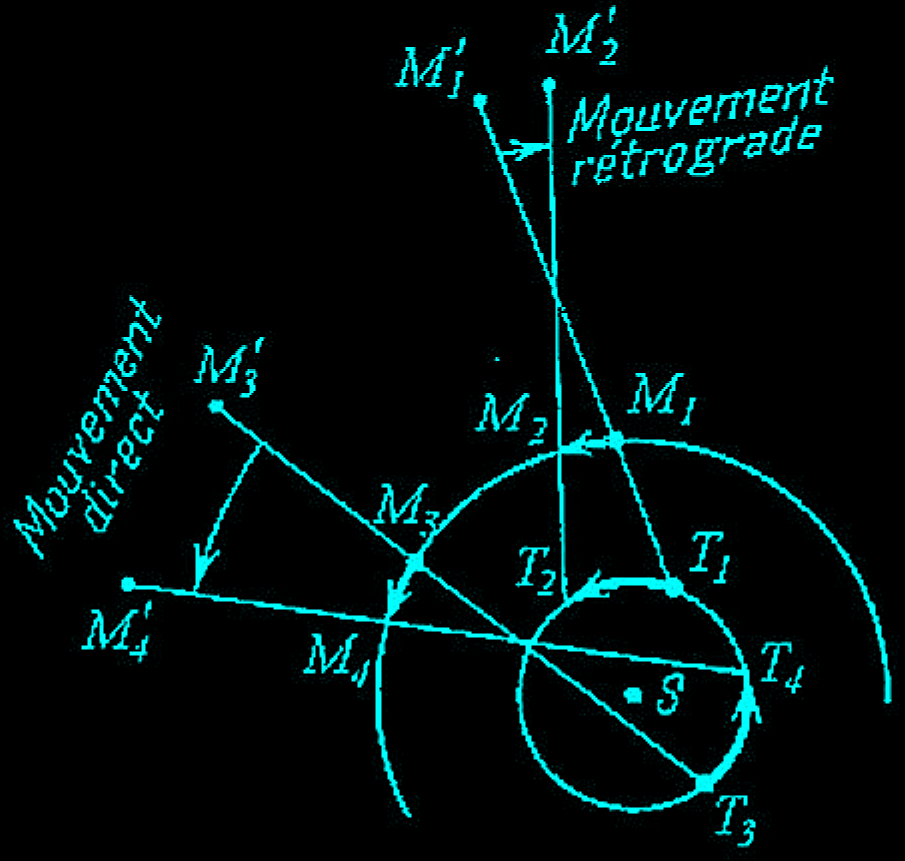
Moto diretto e retrogrado del pianeta Marte



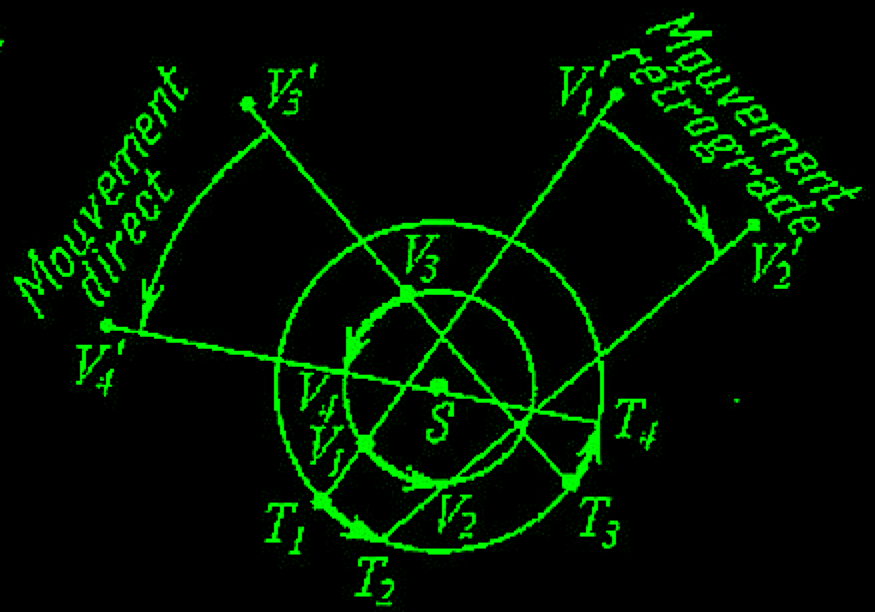
Spiegazione del moto planetario nel sistema tolemaico



Spiegazione del moto planetario nel sistema copernicano
nel caso di un pianeta esterno (a) e interno (b)



(a)



(b)

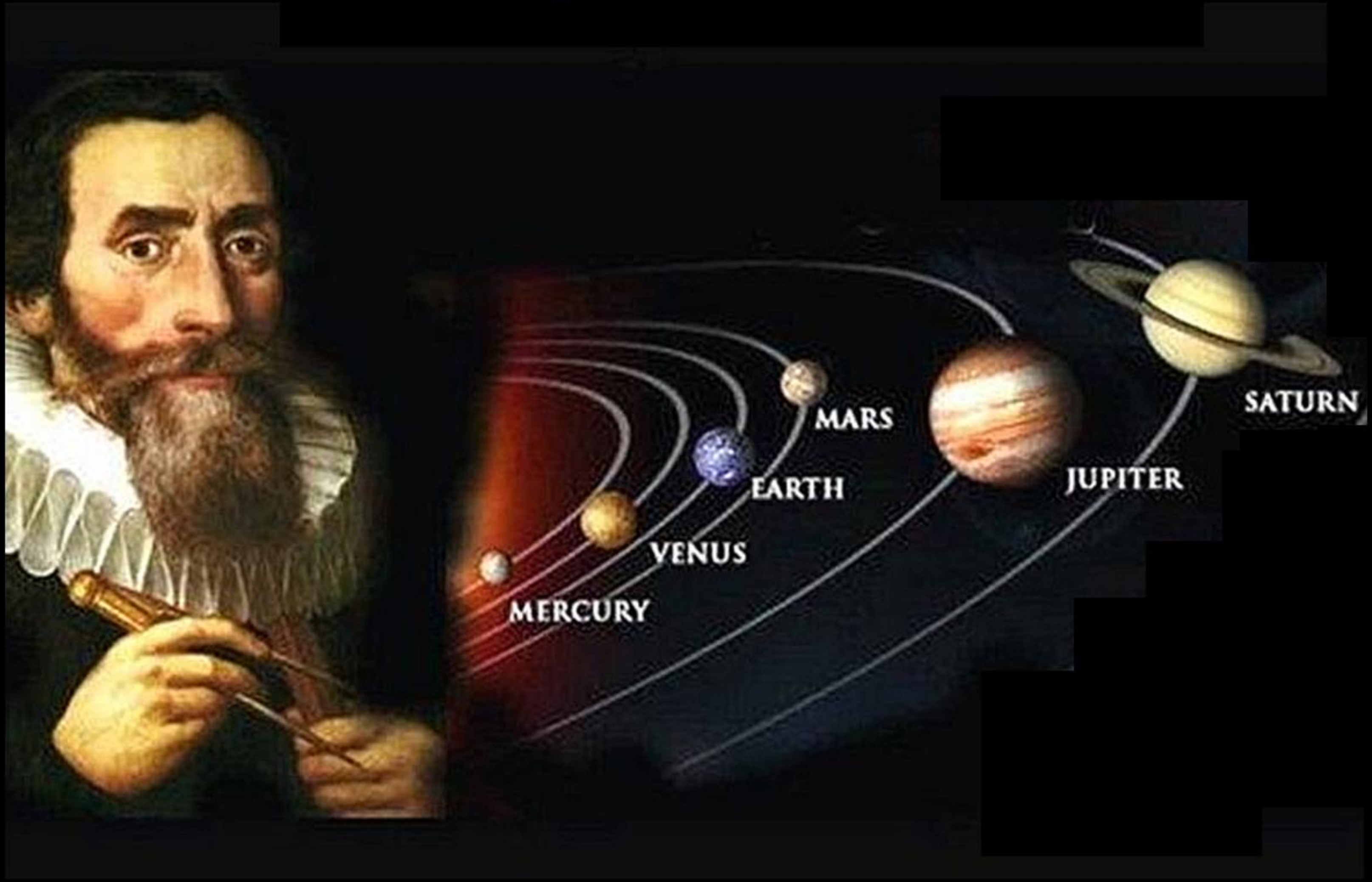
Inizialmente scarso consenso per Copernico: a quel tempo i fenomeni celesti potevano inquadrarsi altrettanto bene nello schema geocentrico tolemaico.

Dalla fine del XVI secolo la teoria eliocentrica è stata fatta oggetto di uno spietato ostracismo: Giordano Bruno, il primo seguace e fervente fautore della nuova teoria, viene bruciato vivo a Roma nel 1600.

Con l'introduzione del cannocchiale in astronomia si fecero delle osservazioni (in particolare quelle che mostravano il susseguirsi delle fasi del pianeta Venere) che potevano essere spiegate solo adottando lo schema copernicano.

Ciò alla fine ha portato all'accettazione della proposta copernicana, vincendo la lunga e ostinata opposizione di pensatori vincolati alle concezioni filosofico-religiose del tempo.

Le Leggi di Keplero



Enunciati delle leggi di Keplero

I^a^ Tutti i pianeti si muovono su orbite piane, nel caso della Terra l'orbita è ellittica e il sole occupa uno dei due fuochi.

(esistenza di una forza centrale)

II^a^ Il segmento che collega un pianeta al sole spazza aree uguali in tempi uguali.

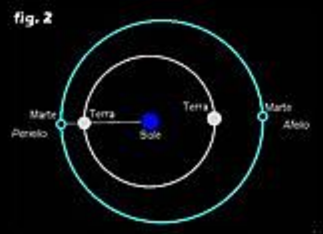
(Legge della costanza della velocità areolare)

III^a^ Il quadrato del periodo di un pianeta è pari al cubo del semiasse maggiore della sua orbita.

(verifica la legge della gravitazione)

Prima Legge di Keplero

Tutti i pianeti si muovono su orbite piane, nel caso della Terra l'orbita è ellittica e il sole occupa uno dei due fuochi.



- *Smonta tutta la teoria geocentrica.*
- *L'orbita di Marte, osservata dalla Terra, ha un andamento retrogrado non compatibile con un solo centro di attrazione.*
- *Mentre, il modello eliocentrico è semplice, afferma che tutte le orbite giacciono su un piano, non contempla orbite «retrogradi» ed è quindi possibile prevedere una forza centrale.*
- *Per definire una orbita basta conoscere la sua eccentricità e ed il suo semiasse maggiore a.*

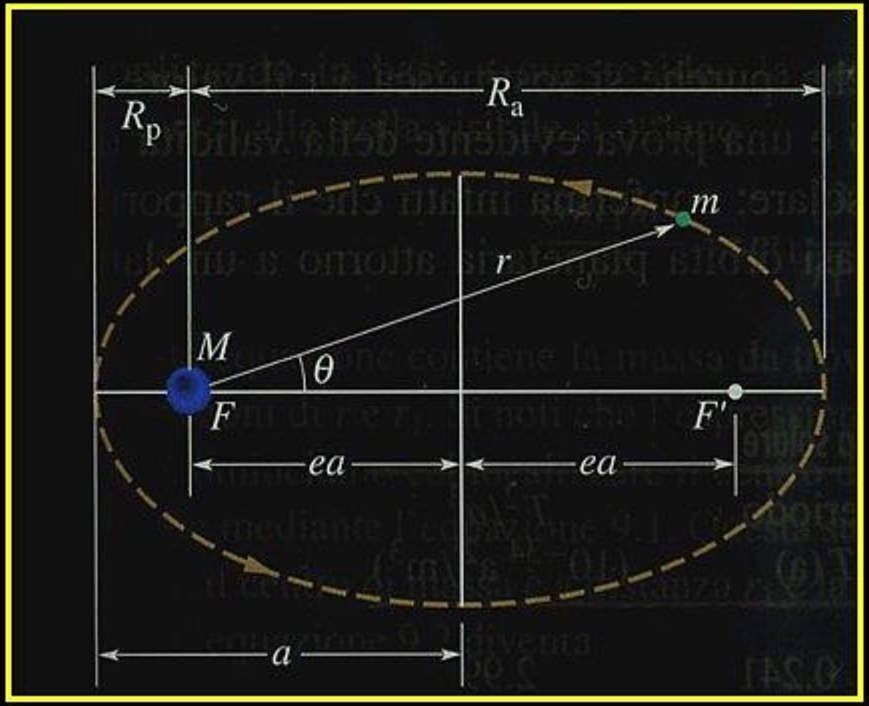
Equazione dell'ellisse

$$r(\theta) = a\,\frac{1 - e^2}{1 + e\cos\theta}$$

Se a > b

$$e = \frac{c}{a} \qquad (0 < e < 1)$$

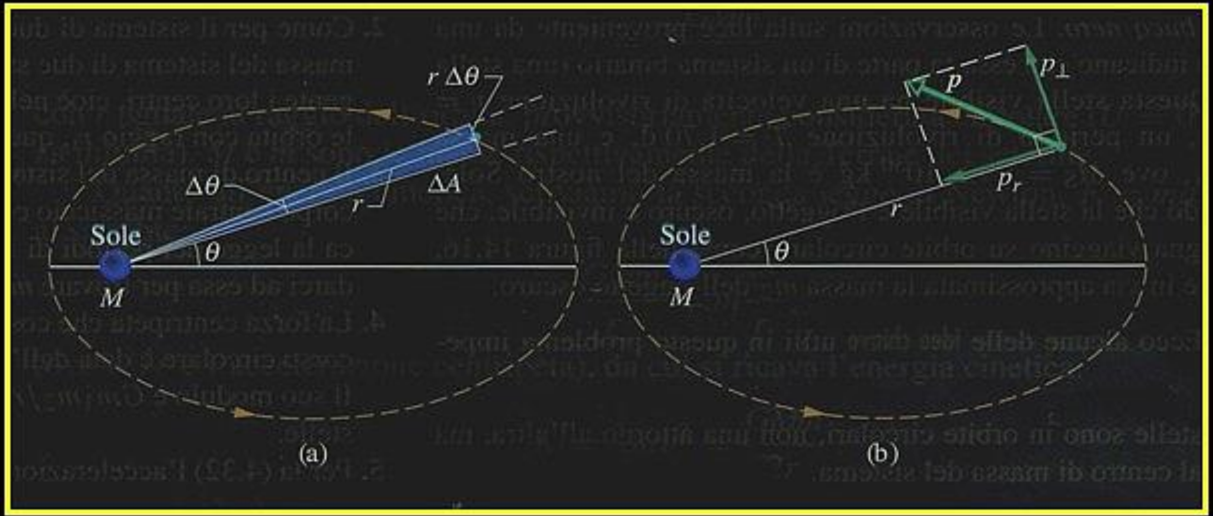
$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$



Orbita Ellittica

II Legge di Keplero

IIª Legge: il segmento che collega un pianeta al sole spazza aree uguali in tempi uguali (costanza delle velocità areolari)



$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2} r \cdot \frac{r d\vec{\theta}}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \vec{\omega}$$

Terza legge di Keplero

Il quadrato del tempo impiegato a percorrere un'orbita è proporzionale al cubo della distanza media sole-pianeta

$$T^2 = K a^3$$

consideriamo la seconda legge di Newton $\underline{F} = m\underline{a}$

Nel caso dei pianeti la forza è la forza della gravitazione universale e se ipotizziamo un moto circolare, potremo dedurre la terza legge di Keplero

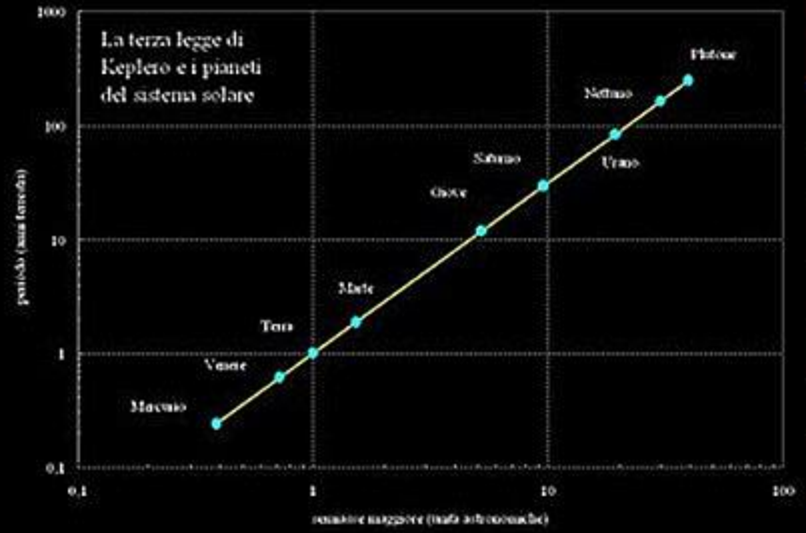
$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad G\frac{mM}{r^2} = m\omega^2 r$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad G\frac{mM}{r^2} = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

$$G\frac{M}{r^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} r \qquad T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) r^3$$

Verifica della III Legge di Keplero

Possiamo verificare la validità della terza legge di Keplero riportando in un grafico il periodo delle orbite e la distanza media dei pianeti nel Sistema Solare. Il rapporto T^2/r^3 vale 2,98 $\pm$ 0.03



Pianeta	Semiasse r (10^{10} m)	Periodo T (a)	T^2/r^3 (10^{-34} a^2/m^3)
Mercurio	5,79	0,241	2,99
Venere	10,8	0,615	3,00
Terra	15,0	1,00	2,96
Marte	22,8	1,88	2,98
Giove	77,8	11,9	3,01
Saturno	143	29,5	2,98
Urano	287	84,0	2,98

Esprimendo il periodo T in anni, il semiasse maggiore dell'orbita a in U.A. (1 UA = 149.6 milioni di Km) si ha:

$$\boxed{\frac{a^3}{T^2} = (\text{Msole} + \text{Mpianeta})}$$

Le masse M sono espresse in masse solari

Nel Sistema Solare: Msole >> Mpianeta quindi:

(Msole + Mpianeta) = 1 $M_\odot$

Problema dei due corpi

Moto di un pianeta intorno al Sole: determinato dalla legge fondamentale della dinamica, e dalla legge di gravitazione universale

Realta':
Problema a molti corpi (influenza anche degli altri pianeti, satelliti, …)

→Separazione del *moto del centro di massa* del Sistema Solare (con ottima approssimazione: moto uniforme, visto che il S.S. e' pressoche' isolato) e del *moto relativo* di ogni parte rispetto al centro di massa

→ Effetto del Sole *dominante* su quello degli altri pianeti

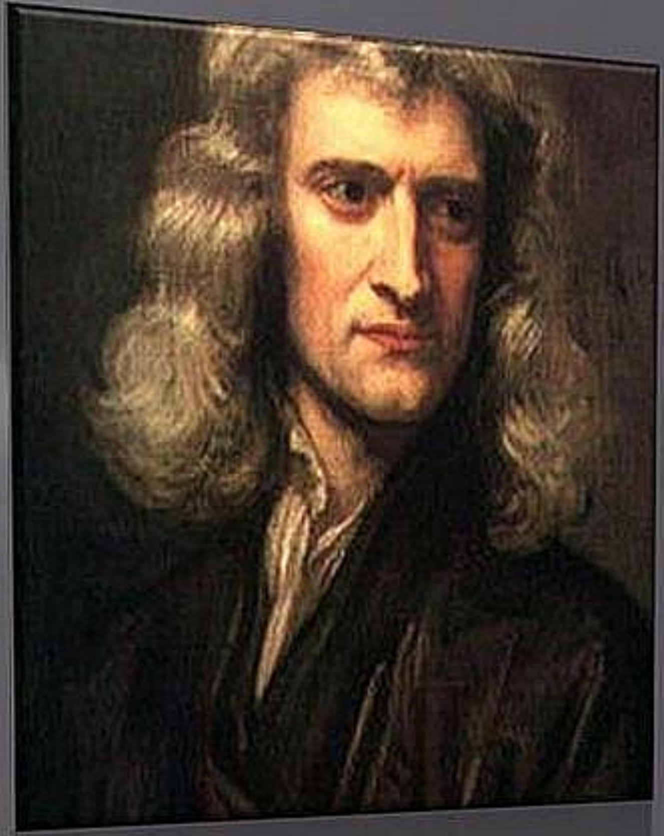
Approssimazioni:
Il centro di massa coincide con il Sole
L'effetto degli altri pianeti viene trascurato

ISAAC NEWTON

Newton nasce nel 1642 nel Lincolnshire, contea dell'Inghilterra. Studiò nella King's school di Grantham e poi al Trinity College di Cambridge

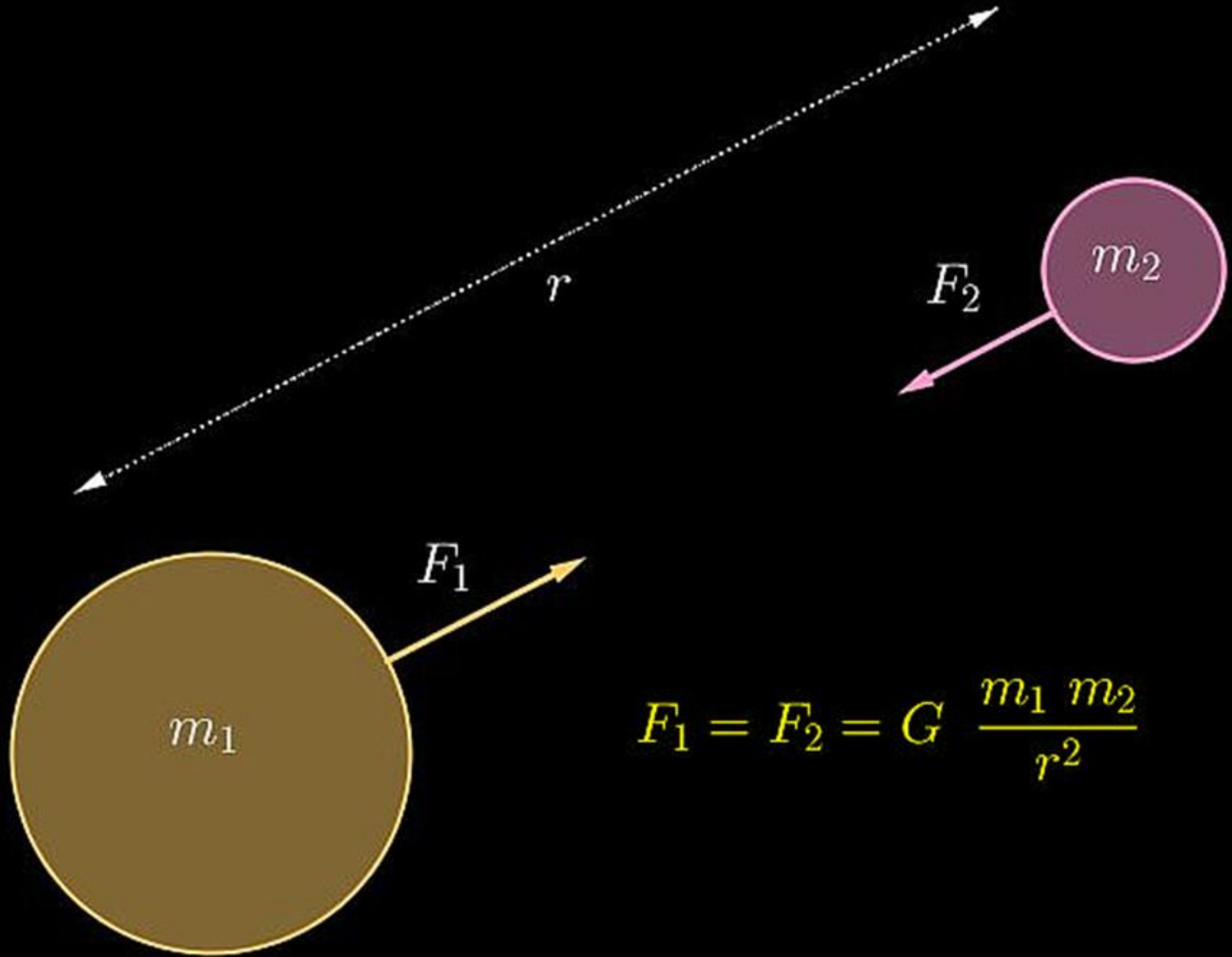
Da subito prediligeva lo studio su Cartesio, Galieleo, Copernico e Keplero. Fu presidente della Royal Society e effettuò numerose scoperte nel campo dell'ottica e della meccanica

classica.



Ma la più celebre fu quella della Legge di Gravitazione Universale:

"Due corpi, rispettivamente di massa m_1 ed m_2, si attraggono con una forza di intensità direttamente proporzionale al prodotto delle masse ed inversamente proporzionale al quadrato della distanza che li separa. Tale forza ha la direzione parallela alla retta congiungente i baricentri dei corpi considerati."

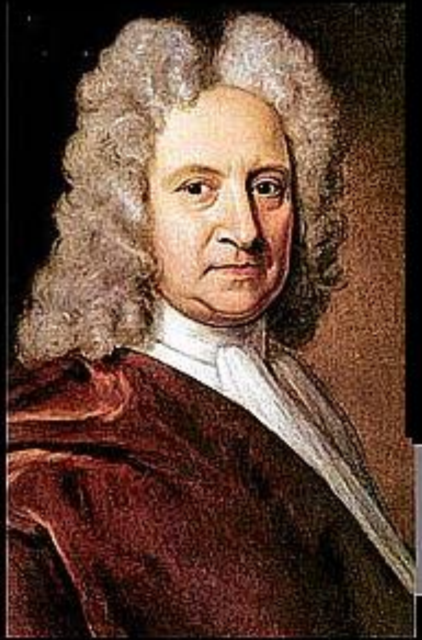


$$F_1 = F_2 = G\,\frac{m_1\,m_2}{r^2}$$

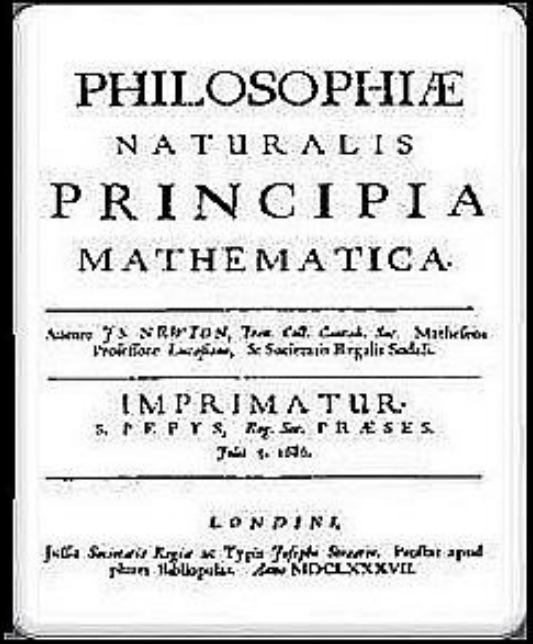
Credendo che la gravità agisse *senza* contatto, venne tanto discusso e criticato.

Secondo gli studiosi del tempo le uniche forze esistenti erano quelle che agiscono per contatto (braccia che spingono un carrello!).

L'importanza di Newton quindi non è solo scientifica, ma anche culturale e filosofica divenendo un punto di riferimento imprescindibile del sapere dei moderni, influenzando con la sua metodologia il razionalismo, l'empirismo e cultura illuministica.



Edmond Halley



PHILOSOPHIÆ

NATURALIS

PRINCIPIA

MATHEMATICA

Autore JS. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.

S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.

Julii 5. 1686.

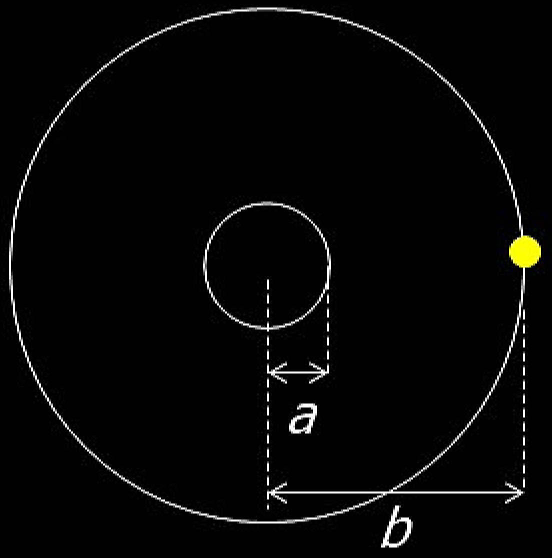
LONDINI,

Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

Verso la Gravitazione universale

$a \sim 6000$ Km
$b \sim 3.84 \times 10^5$ Km

L'intuizione di Newton è che la forza che agisce sulla mela è la stessa che attrae la Luna sulla Terra. D'altronde si disputava fra vari Scienziati del tempo che la forza di attrazione dipendesse dalle masse dei pianeti $F \sim Mm$

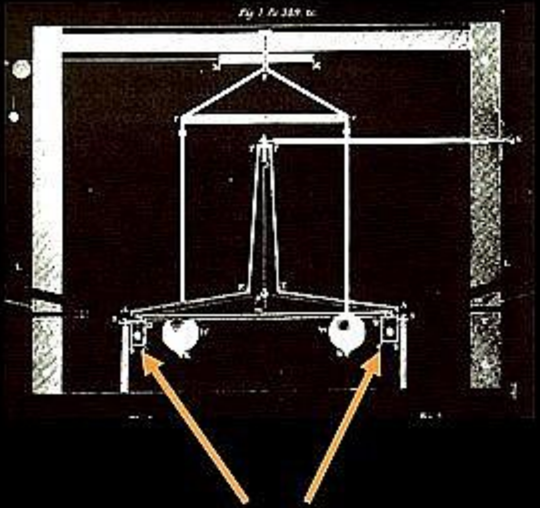


Inoltre si constatò che il rapporto delle accelerazioni della mela e della Luna era pari al rapporto dei quadrati delle distanze fra i centri dei due corpi e il centro della Terra conclude che $F \sim 1/r^2$

Queste due idee combinate insieme portano ad una relazione semplice che si chiama equazione della gravitazione universale

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}$$

Cavendish misura G

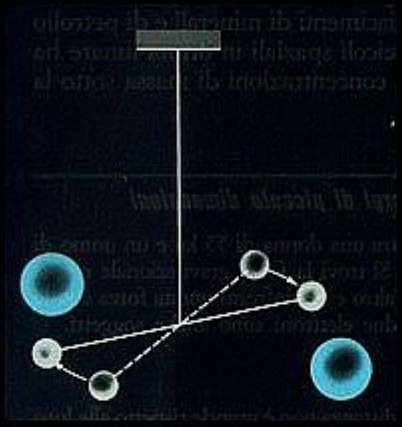


- Nel 1798 H. Cavendish misurò tramite una bilancia a torsione la costante G che compare nell'equazione della Gravitazione Universale :

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}$$

- All'equilibrio l'attrazione di Gravità è uguale alla torsione del filo che tiene il bilanciere.

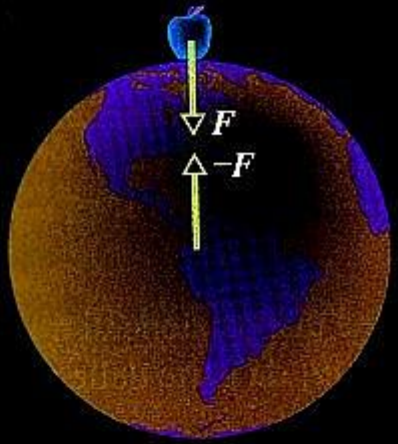
- r è la distanza fra le sfere a riposo,
- m e M sono le masse delle sfere.



$$G = \frac{Fr^2}{mM} = 6,67 \times 10^{-11} Nm^2 / kg^2$$

Attrazione Gravitazionale

- La leggendaria mela di Newton cadrà sulla terra secondo $\underline{F} = m\underline{a}$ con $\underline{a} = \underline{g}$
Come si ricava il valore di g dalla legge della gravitazione universale



$$mg = G\frac{mM_T}{r^2} \Rightarrow g = G\frac{M_T}{r^2}$$

$$r = R_T \Rightarrow g = G\frac{M_T}{{R_T}^2} = 9.81\frac{m}{s^2}$$

$G = 6.67x10^{-11}$ [m^3/(kgsec2)]
$M_t = 5.98x10^{24}$ [kg]
$R_t = 6.4\ 10^6$ [m]

$$G = \frac{Fr^2}{mM} = 6{,}67 \times 10^{-11}\ Nm^2 / kg^2$$

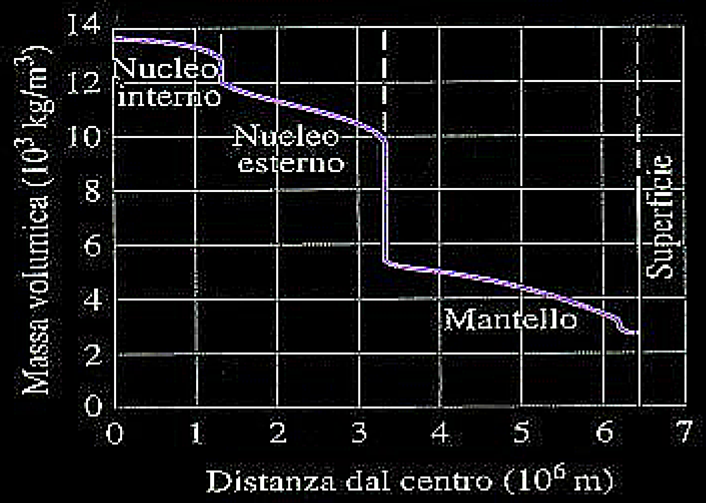
Densità della terra

- *Come si può calcolare la densità della terra?*

$$g = \frac{GM_T}{R_T^2};\ \rho = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} \Rightarrow M_T = \frac{4}{3}\rho\pi R_T^3$$

$$g = \frac{G\frac{4}{3}\rho\pi R_T^3}{R_T^2} = \frac{4}{3}G\rho\pi R_T$$

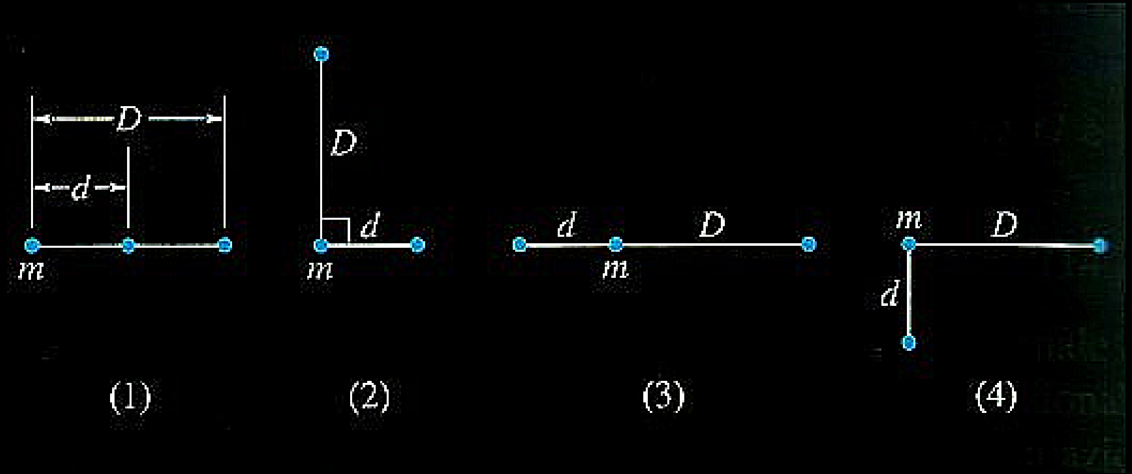
$$\rho = \frac{3g}{4\pi R_T G} = 5.5 \cdot 10^3\, kg/m^3$$



- *La densità della terra è molto alta e molto probabilmente è discontinua. Attualmente l'ipotesi più accreditata è quella di figura*

Attrazione Gravitazionale
Principio di Sovrapposizione

- La risultante delle forze agenti su una massa è la somma delle singole forze



$$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \vec{F}_{1,4} + \ldots \vec{F}_{1,n} = \sum_{i=2}^{n} \vec{F}_{1,i} \quad \rightarrow \quad F_{tot} = \int dF$$

- *Non esistono schermi per le forze gravitazionali*

Attrazione Gravitazionale

Che cosa è che tiene insieme un ammasso stellare?

La forza di gravità.

La forza gravitazionale è una delle quattro forze fondamentali della natura ed è conservativa

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}$$

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11}\left[M^3K^{-1}S^{-2}\right]$$

La massa crea un campo di forza gravitazionale pari a:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_G}{m} \Rightarrow$$

$$\vec{g} = -\frac{GM}{r^2}$$

ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE

Poiché la forza gravitazionale è centrale e dipende solo dalla distanza, essa è conservativa.

Esiste una funzione energia potenziale gravitazionale U tale che:

$$\vec{F}_G = -grad\,U = -\frac{dU}{dr}$$

$$\frac{dU}{dr} = G\frac{mM}{r^2}$$

Si integra la precedente attribuendo all'energia potenziale valore zero per $r \to \infty$.

$$\int_0^{E_p} dU = GmM\int_\infty^r \frac{dr}{r^2}$$

ENERGIA MECCANICA TOTALE

Energia totale di un sistema di due particelle di massa M ed m soggette alla mutua interazione gravitazionale:

$$E = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GmM}{r}$$

Se $M >> m$:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GmM}{r}$$

Nel caso di orbita circolare della massa m intorno alla massa M si ha:

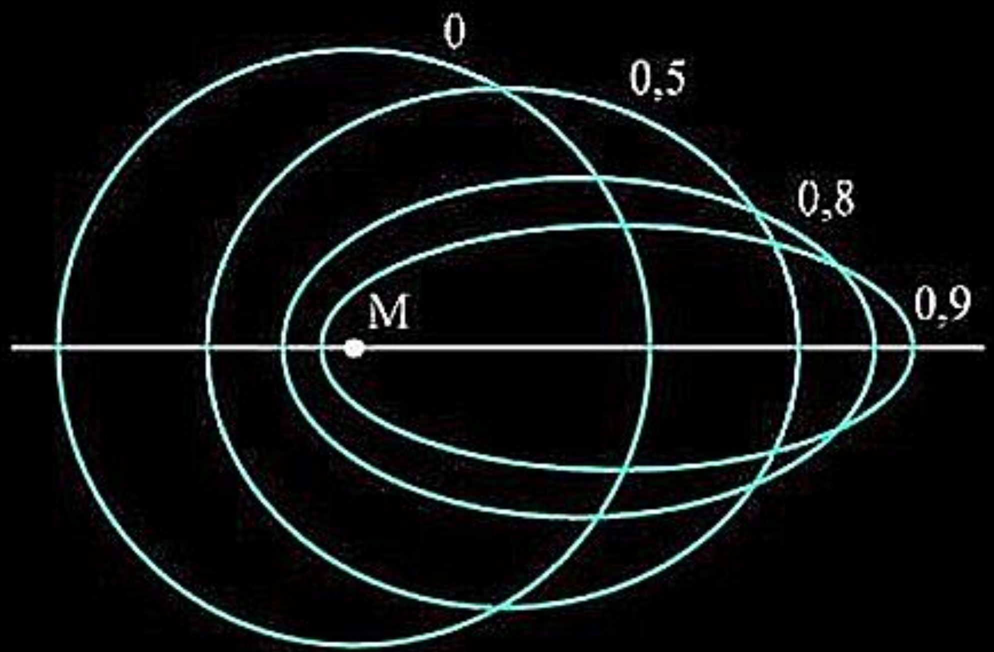
$$F_G = G\frac{mM}{r^2} = ma = m\frac{v^2}{r}$$

$$mv^2 = G\frac{mM}{r}$$

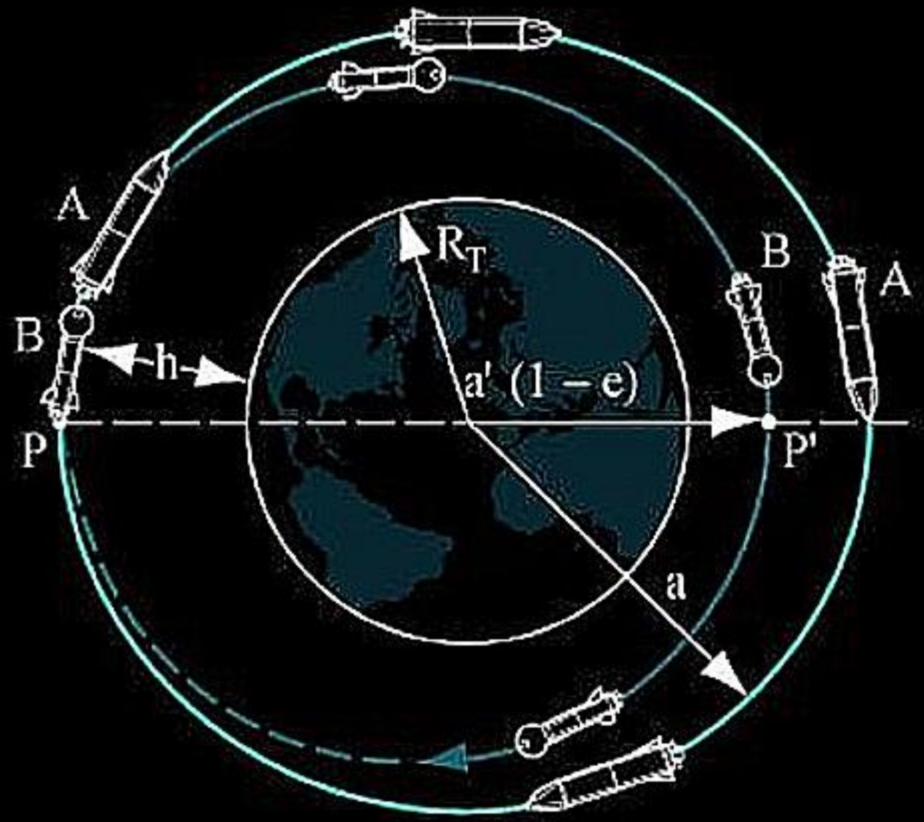
$$E = -G\frac{mM}{2r}$$

Osservazione importante

Questo risultato vale non solo per le orbite circolari ma anche per quelle ellittiche.



Orbite caratterizzate dallo stesso semiasse maggiore e quindi dalla stessa energia totale, ma con valori di eccentricità (indicati per ciascuna orbita) e momento angolare diversi.



Manovra di “sorpasso” eseguita dal veicolo spaziale B, inizialmente sulla stessa orbita di un altro satellite A, identico al primo, che lo precede. Le dimensioni non sono in scala.

…a proposito della Forza di Gravità

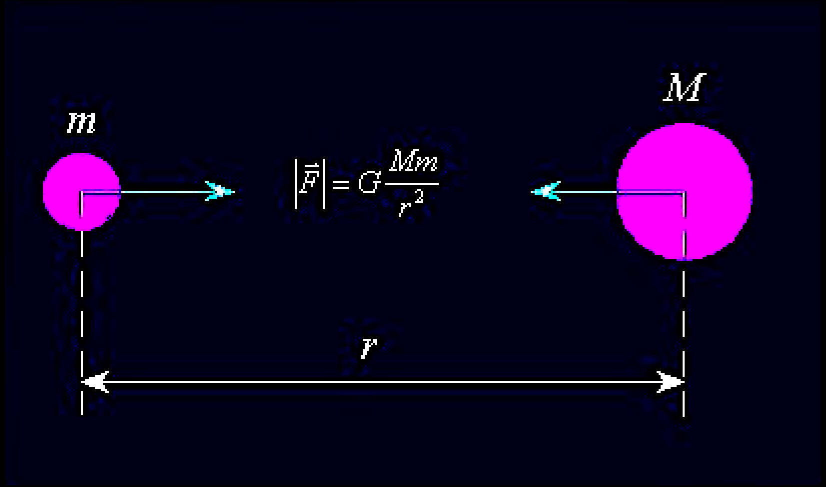
e del numero di dimensioni dell'Universo

- I fenomeni gravitazionali sono guidati nella loro intensità da alcuni parametri, ad esempio la costante di gravitazionale universale.
- Se la gravità fosse più o meno intensa (una parte su 10^{40}) avremmo estremi in cui l'universo si chiuderebbe in un tempo ridottissimo (nessuna evoluzione) o le stelle non si formerebbero neppure (nessuna fonte di energia).

Isaac Newton (1642 – 1727)

$$F_G = G_0 \frac{M\,m}{r^2}$$

se l'Universo ha 3 dimensioni…



...in 3 dimensioni

In un Universo a D dimensioni:

$$F_G = G_0 \frac{M\,m}{r^{D-1}}$$

D = numero di dimensioni dell'Universo

se D=3 allora la proporzionalità è $1/r^2$

Per un numero di dimensioni maggiore di 3 l'Universo diventa sfavorevole allo sviluppo della vita.

Se D>3 la gravità diminuisce troppo rapidamente, la curvatura dello Spazio-Tempo è minore, le stelle non possono più rimanere in equilibrio e non possono più esistere orbite planetarie stabili su lunghi periodi.

Se fosse D=2 ?
Teoria dell'Universo Olografico