Università "Cardinale Giovanni Colombo" - Milano

A.A. 2024 - 2025

Corso di Astrofisica

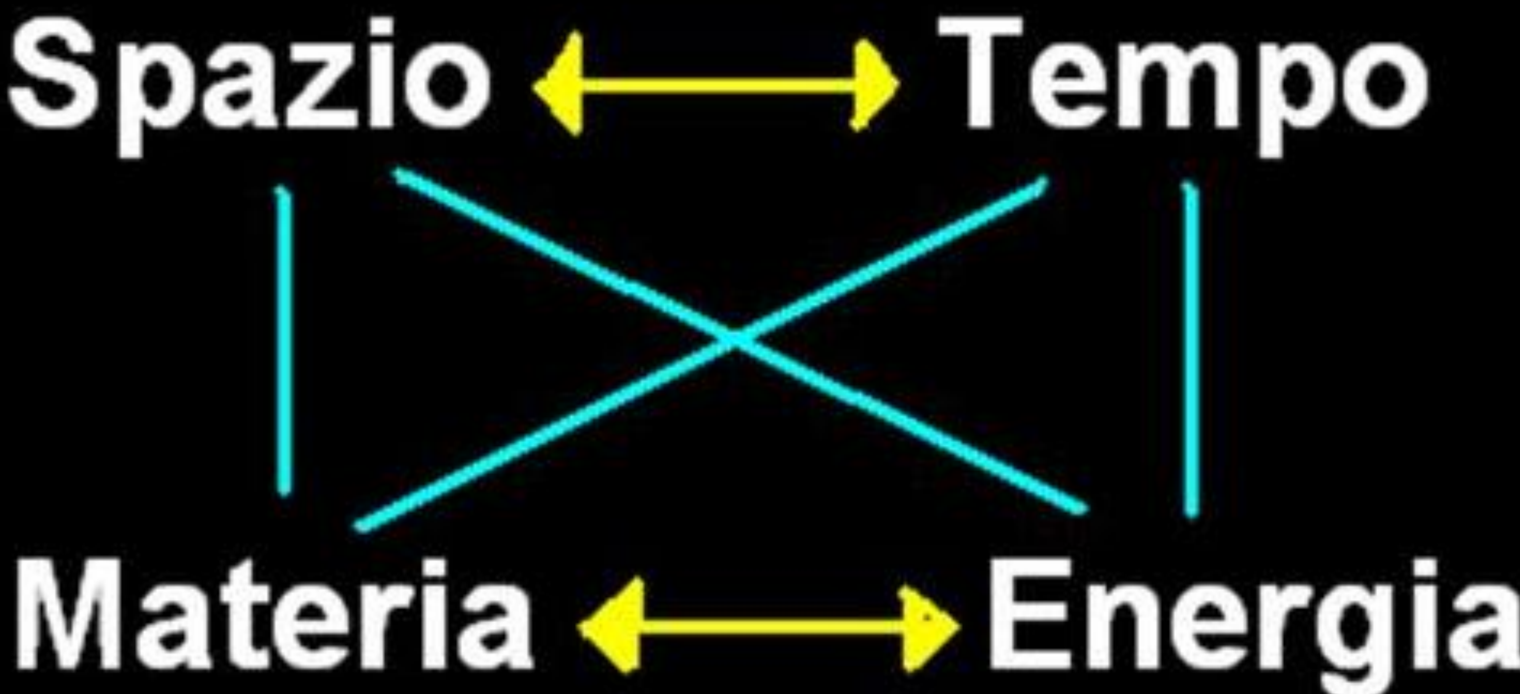
Docente: **Adriano Gaspani**

Lezione 15

I modelli cosmologici di Friedmann-Robertson-Walker


Spazio
Tempo
Materia
Energia
4 diversi aspetti della stessa cosa...

Esiste quindi una corrispondenza
incrociata tra tutti...



sono legati indissolubilmente...

Unità di Plank

Unità di Planck: unità fondamentali

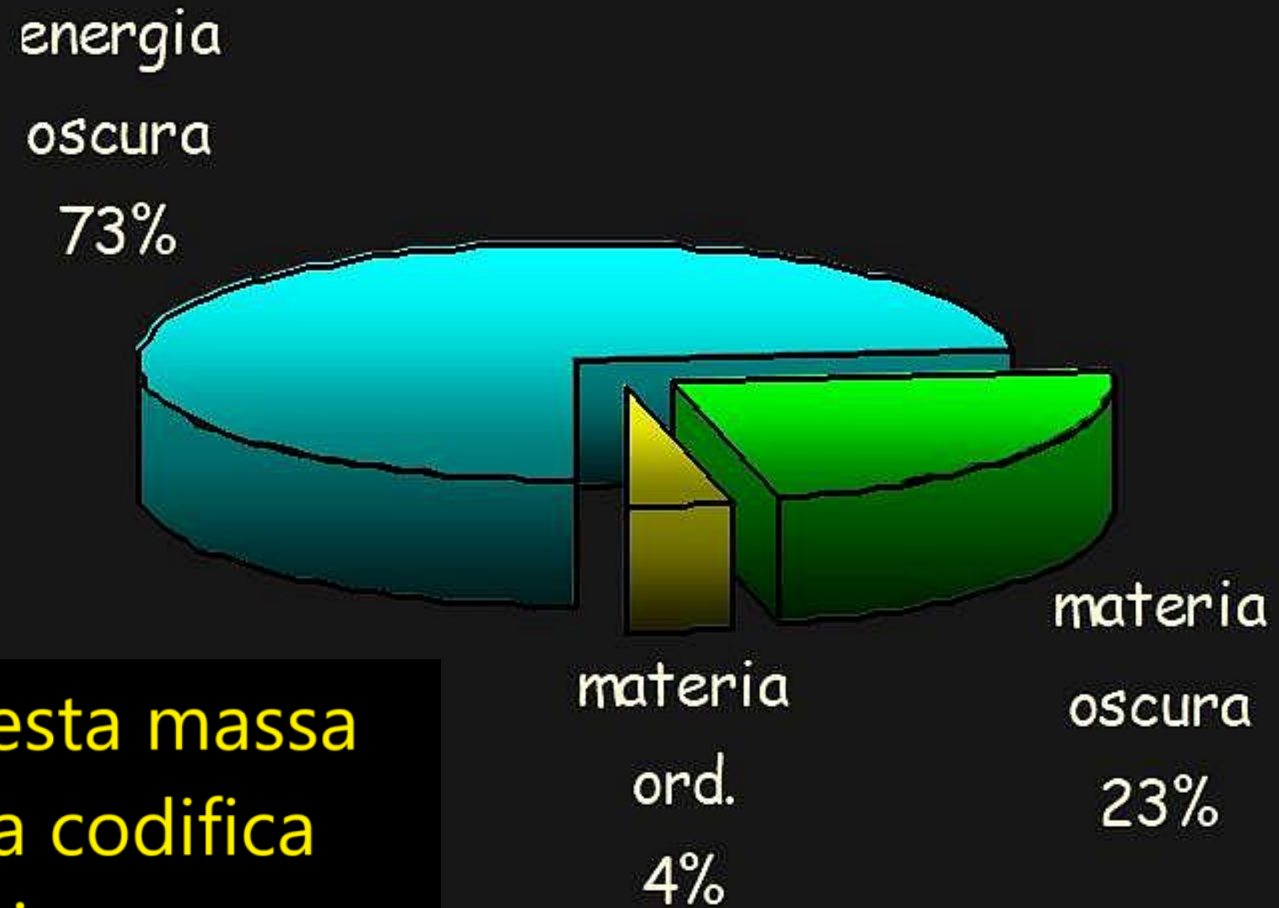
Dimensione	Formula		Valore nel Sistema Internazionale
Lunghezza di Planck	Lunghezza (L)	$l_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$	1,616 252(81) × 10^{-35} m
Massa di Planck	Massa (M)	$m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$	2,176 44(11) × 10^{-8} kg
Tempo di Planck	Tempo (T)	$t_p = \frac{l_p}{c} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}}$	5,391 24(27) × 10^{-44} s
Temperatura di Planck	Temperatura (Θ)	$T_p = \frac{m_p c^2}{k_B} = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G k_B^2}}$	1,416 785(71) × 10^{32} K
Carica di Planck	Carica elettrica (Q)	$q_p = \sqrt{4\pi\varepsilon_0 \hbar c}$	1,875 545 870 × 10^{-18} C

Le tre costanti della fisica sono espresse in questo modo semplicemente, mediante l'uso delle unità fondamentali di Planck:

$$\boxed{c = \frac{l_P}{t_P}} \qquad \boxed{\hbar = \frac{m_P l_P^2}{t_P}} \qquad \boxed{G = \frac{l_P^3}{m_P t_P^2}}$$

Di cosa è fatto l'UNIVERSO?

...per lo meno il nostro



tutta questa massa e energia codifica informazione

Uno degli scenari a cui la Teoria della Relatività di Einstein ha portato a guardare con nuovi occhi è il nostro stesso universo.

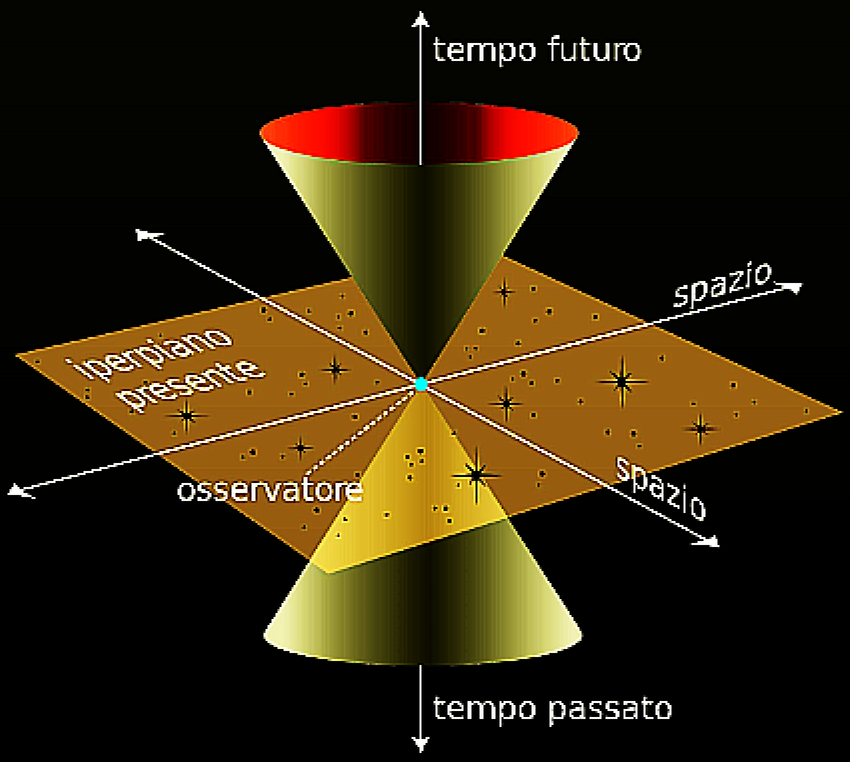
- Quale soluzione dell'equazione di Einstein descrive al meglio l'universo in cui viviamo?

Figura: Alexandre Friedmann

- Friedmann, nel 1922, trovò per primo le appropriate soluzioni cosmologiche dell'equazione di Einstein.
- I modelli cosmologici della classe generale studiata da Friedmann sono comunemente chiamati modelli di Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW)

- Struttura dell'universo così come predetta dalla Relatività Generale
- Previsioni dinamiche dell'equazione di Einstein
- Curvatura dello spaziotempo
- Big Bang

$\longrightarrow$ *Principio Cosmologico*



- Cosmologia: dati osservati e assunzioni teoriche
- Rivoluzione Copernicana: la Terra non occupa posizione privilegiata
- Grandezza universo tale da poter affermare che le osservazioni non dipendano dalla direzione in cui si guarda

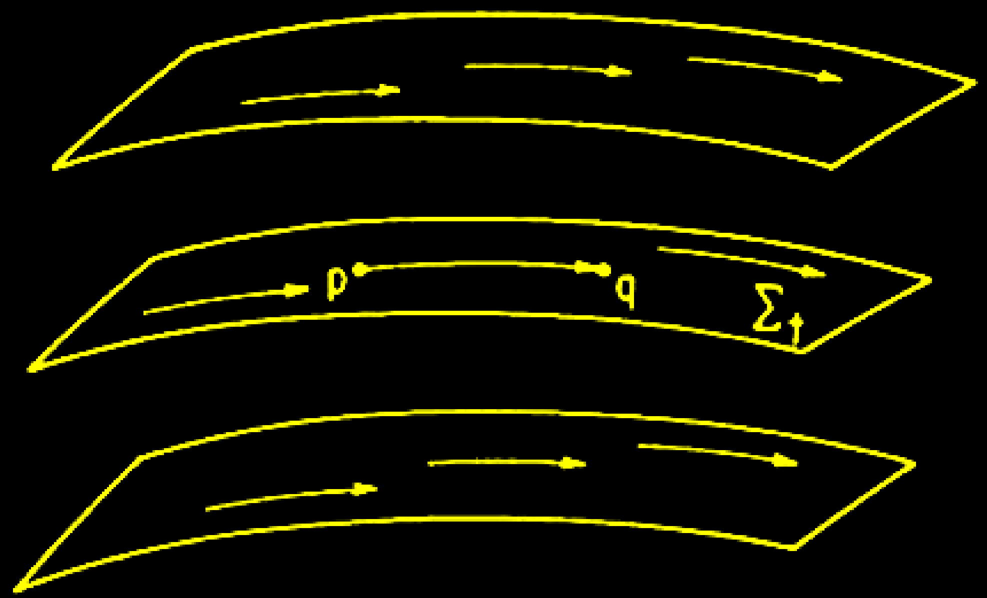
Questi concetti si traducono con i termini *omogeneità* ed *isotropia*

- L'omogeneità afferma che *ogni punto dello spazio ad un qualsiasi istante di tempo dato appare come qualsiasi altro punto*
- l'isotropia, afferma che *in ogni punto, ogni osservatore può vedere l'universo come isotropo*

Più dettagliatamente:

Omogeneità

Uno spaziotempo si dice (spazialmente) **omogeneo** se esiste una famiglia ad un parametro di ipersuperfici Σ_t di *genere spazio* che ricoprono lo spaziotempo in modo che per ogni t e per ogni due punti dati $p, q \in \Sigma_t$, deve esistere un'isometria della metrica dello spaziotempo, g_{ab}, che porta p in q.



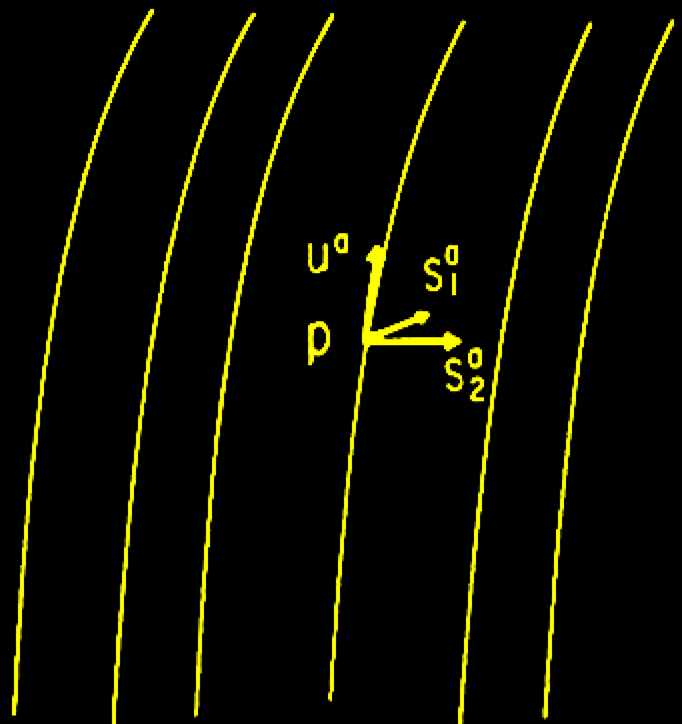
Le ipersuperfici di omogeneità spaziale nello spaziotempo.

Più dettagliatamente:

Isotropia

Uno spaziotempo si dice (spazialmente) **isotropo** in ogni punto, se esiste una corrispondenza di curve di *genere tempo* (i.e. osservatori), le cui tangenti sono denotate con u^a, che ricoprono lo spaziotempo e soddisfano la seguente proprietà: dato un qualsiasi punto p e due qualsiasi vettori tangenti $s_1^a, s_2^a \in V_p$ (i.e. vettori in p ortogonali a u^a), allora esiste un'isometria di g_{ab} che lascia p e u^a a p fissato, ma ruota s_1^a in s_2^a.

Dunque, in un universo isotropo non è possibile costruire un vettore tangente ortogonale ad u^a privilegiato.



Le linee d'orizzonte di osservatori isotropi nello spaziotempo.

La geometria spaziale indotta delle superfici Σ_t è soggetta alle seguenti restrizioni:

- Per l'*omogeneità*, devono esistere isometrie di h_{ab} che portano un qualsiasi $p \in \Sigma_t$ in un qualsiasi $q \in \Sigma_t$;
- Per l'*isotropia*, deve essere impossibile costruire vettori privilegiati su Σ_t.

$\longrightarrow$ *Curvatura*

La seconda condizione, in particolare, è molto forte. Consideriamo il tensore di Riemann R_{abc}^{d} costruito da h_{ab} su Σ_t. Se alziamo il terzo indice con h^{ab}, possiamo vedere R_{ab}^{cd} in p come una mappa lineare, L, del vettore spazio W di 2-forme (i.e. di tensori antisimmetrici di rango $(0,2)$), in se stesso:

$$L : W \longrightarrow W$$

L è simmetrica (i.e. è una mappa autoaggiunta con prodotto interno su W definito positivo determinato da h_{ab}).
W ha una base ortonormale di autovettori di L.

Per non violare l'ipotesi di isotropia, tutti gli autovalori di L devono essere uguali. Ciò significa che L è un multiplo dell'operatore identità

$$L = KI$$

cioè

$$R_{ab}{}^{cd} = K\delta^{c}{}_{[a}\delta^{d}{}_{b]}$$

Abbassando gli indici, abbiamo

$$R_{abcd} = K h_{c[a} h_{b]d}$$

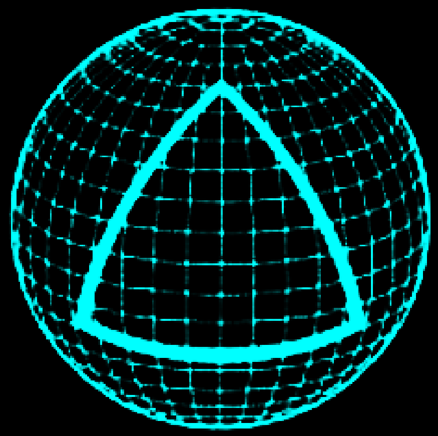
Per provare il fatto che K sia costante, così come implicano omogeneità ed isotropia, andiamo a sostituire $R_{abcd} = K h_{c[a} h_{b]d}$ nell'identità di Bianchi $\nabla_{[a} R_{bc]d}{}^{e} = 0$ e otteniamo:

$$0 = \nabla_{[e} R_{ab]cd} = (\nabla_{[e} K) h_{|c|a} h_{b]d}$$

Su una varietà di dimensione maggiore o uguale a 3, il lato destro dell'equazione si annulla per $\nabla_e K = 0$, che implica K costante.

Uno spazio in cui è soddisfatta l'equazione precedente, con K costante, è chiamato **spazio a curvatura costante**.

Completiamo l'obiettivo di determinare le possibili geometrie di Σ_t andando a studiare gli spazi a curvatura costante rispetto ai possibili valori di K.

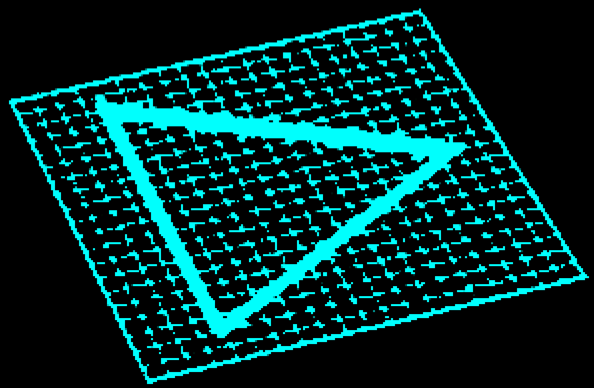


Per $K > 0$ abbiamo le 3-sfere come superfici in spazio $\mathbb{R}^4$, le cui coordinate soddisfano l'equazione:

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = R^2$$

Possiamo scrivere la metrica della 3-sfera in coordinate sferiche come:

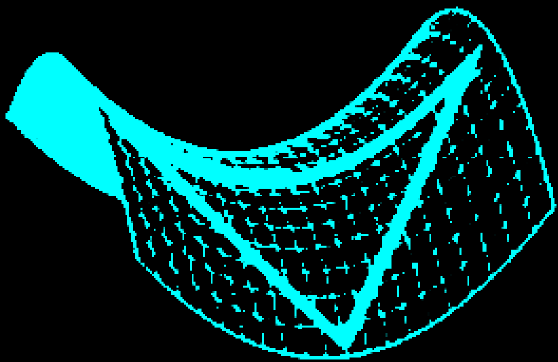
$$ds^2 = d\psi^2 + \sin^2\psi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$



Flat Curvature

Per $K = 0$ abbiamo l'usuale spazio euclideo, le cui coordinate sono quelle cartesiane e la metrica:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$


Negative Curvature

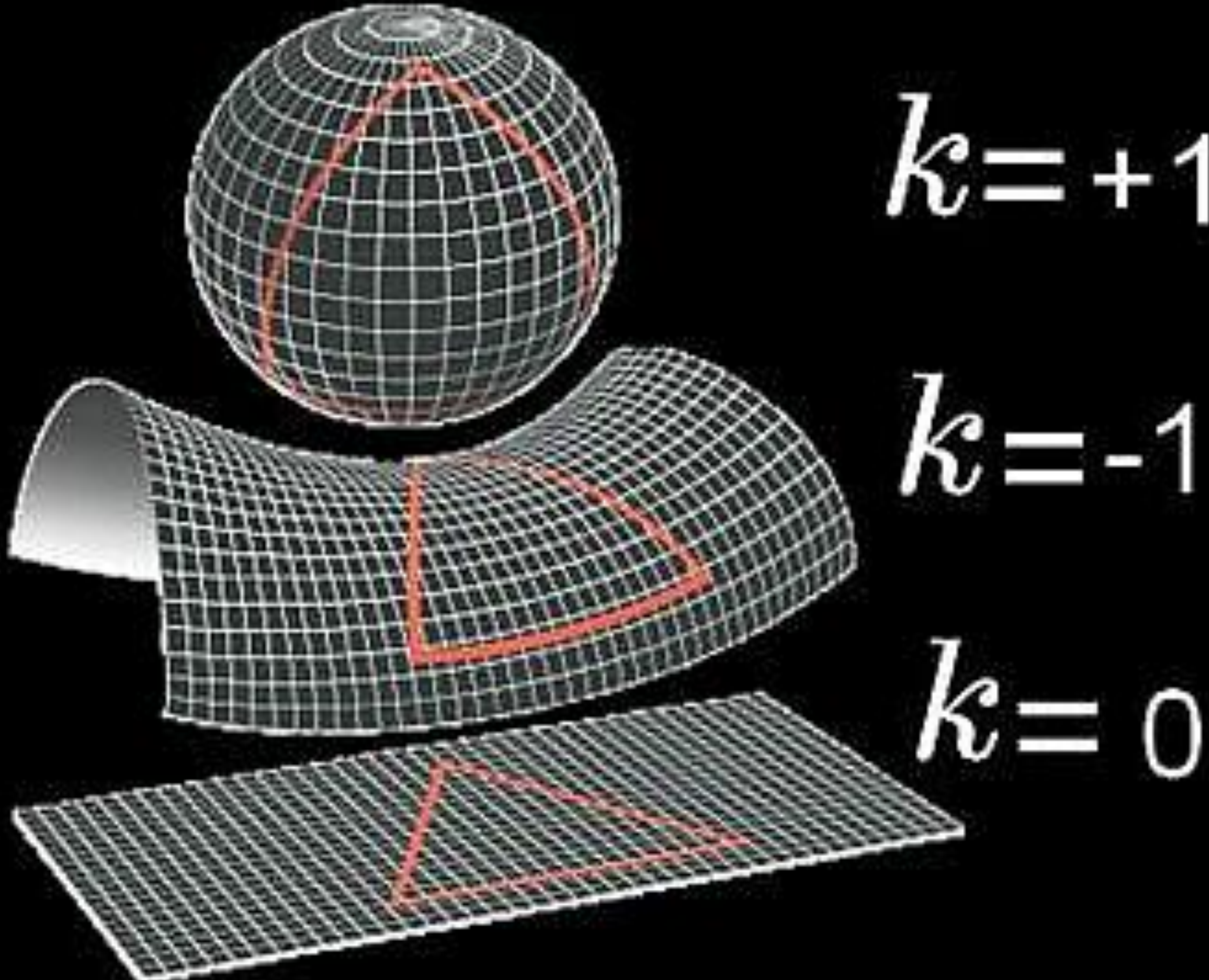
Per $K < 0$ abbiamo gli iperboloidi come superfici in spazio $\mathbb{R}^4$, le cui coordinate soddisfano l'equazione:

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = R^2$$

In coordinate iperboliche, la metrica è:

$$ds^2 = d\psi^2 + \sinh^2\psi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

$\longrightarrow$ *Universo chiuso, universo aperto*



La forma dell'Universo?

Sotto la restrittiva condizione di universo **omogeneo ed isotropo**, la struttura della relatività generale ammette due altre possibilità distinte, oltre a quelle di una struttura **piatta**, ossia quella sferica ed iperbolica.
L'ipotesi di una geometria sferica è particolarmente interessante in quanto **varietà compatta** che quindi descriverebbe un universo che è finito ma senza confini.
Un tale universo è detto **chiuso**, mentre un universo governato da una geometria iperbolica è detto **aperto**.

L'interessante domanda a cui ha portato la teoria di Einstein è proprio questa: *il nostro universo è chiuso o aperto?*

Andiamo a esprimere la metrica quadridimensionale dello spaziotempo g_{ab} come:

$$g_{ab} = -u_a u_b + h_{ab}(t)$$

A questo punto, possiamo associare ad ogni ipersuperficie il suo **tempo proprio**, τ.

τ, insieme alle coordinate spaziali, identifica ogni evento dell'universo.

In queste coordinate, la metrica dello spazio tempo prende la forma:

$$ds^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau) \begin{cases} d\psi^2 + \sin^2\psi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \\ dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ d\psi^2 + \sinh^2\psi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \end{cases}$$

Queste equazioni rappresentano la forma generale della metrica, chiamata **modello cosmologico Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker**.

Per determinare la geometria spaziale e la funzione $a(\tau)$, occorre studiare l'equazione di Einstein:

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = 8\pi T_{ab}$$

- G_{ab} è chiamato tensore di Einstein
- R_{ab}, tensore di curvatura di Ricci
- R, la curvatura scalare, traccia di R_{ab}
- g_{ab}, il tensore metrico
- T_{ab}, il tensore energia-impulso
- $c = 1$

Il nostro obiettivo è ora quello di sostituire la metrica ottenuta in precedenza nell'equazione di Einstein per ottenere previsioni circa l'evoluzione dinamica dell'universo.

Il primo passaggio è quello di descrivere la materia in esso contenuta in termini del suo tensore *energia-impulso*, T_{ab}, che compare nel lato destro dell'equazione

Con buona approssimazione, il tensore energia-impulso della materia nell'universo attuale prende la forma:

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + P(g_{ab} + u_a u_b).$$

Andiamo a calcolare G_{ab} dalla metrica confrontandola con $8\pi T_{ab}$. **A priori**, avremo 10 equazioni corrispondenti alle 10 componenti indipendenti di un tensore simmetrico a due indici.

Ma le uniche componenti indipendenti dell'equazione di Einstein risultano essere soltanto:

$$G_{\tau\tau} = 8\pi T_{\tau\tau} = 8\pi\rho$$
$$G_{**} = 8\pi T_{**} = 8\pi P$$

dove:

- $G_{\tau\tau} = G_{ab}u^a u^b$;
- $G_{**} = G_{ab}s^a s^b$;
- s^a è un qualsiasi vettore unitario tangente alle ipersuperfici omogenee.

Dobbiamo ora calcolare $G_{\tau\tau}$ e G_{**} in termini di $a(\tau)$.

Lo facciamo esplicitamente per il caso della geometria piana, cioè:

$$ds^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau)(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Definendo i simboli di Christoffel come $\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{hk} \left(\frac{\delta g_{ih}}{x^j} + \frac{\delta g_{jh}}{x^i} - \frac{\delta g_{ij}}{x^h} \right)$, osserviamo che le componenti che non svaniscono sono:

$$\Gamma^{\tau}{}_{xx} = \Gamma^{\tau}{}_{yy} = \Gamma^{\tau}{}_{zz} = a\dot{a}$$

$$\Gamma^{x}{}_{x\tau} = \Gamma^{x}{}_{\tau x} = \Gamma^{y}{}_{y\tau} = \Gamma^{y}{}_{\tau y} = \Gamma^{z}{}_{z\tau} = \Gamma^{z}{}_{\tau z} = \frac{\dot{a}}{a}$$

Quindi, le componenti indipendenti del tensore di Ricci, $R_{ab} = R_{acb}{}^{c}$, sono:

$$R_{\tau\tau} = -3\frac{\ddot{a}}{a}$$

$$R_{**} = a^{-2} R_{xx} = \frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2}$$

Avendo poi

$$R = -R_{\tau\tau} + 3R_{**} = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)$$

otteniamo

$$G_{\tau\tau} = R_{\tau\tau} + \frac{1}{2}R = 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi\rho$$
$$G_{**} = R_{**} - \frac{1}{2}R = -2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi P$$

e possiamo riscrivere la seconda equazione sfruttando la prima:

$$3\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi(\rho + 3P)$$

Eseguendo gli stessi calcoli per i casi della geometria sferica ed ed iperbolica, otteniamo le equazioni generali per l'evoluzione cosmologica omogenea ed isotropa:

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi\rho - \frac{3k}{a^2}$$

$$3\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi(\rho + 3P)$$

dove per $k = +1$ si ha la sfera tridimensionale, per $k = 0$ lo spazio piatto, per $k = -1$ l'iperboloide.

La scala di distanza fra tutti gli osservatori isotropi cambia con il tempo, ma non c'è alcun centro privilegiato di espansione o contrazione.
Quindi, se la distanza, misurata sulla superficie omogenea, tra due osservatori isotropi al tempo τ è R, il tasso di variazione di R è

$$v = \frac{dR}{d\tau} = \frac{R}{a}\frac{da}{d\tau} = HR$$

dove $H(\tau) = \dot{a}/a$ è chiamata **costante di Hubble** ed il suo valore varia col tempo. L'equazione precedente è chiamata **Legge di Hubble**.

Einstein, non contento che la sua teoria prevedesse un universo in evoluzione, introdusse una nuova costante fondamentale, quella *cosmologica*, in modo che la sua equazione potesse tornare a prevedere **soluzioni statiche**.

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi T_{ab}$$

Assumeremo nel seguito $\Lambda = 0$.

$\longrightarrow$ *Big Bang*

Ricordiamo che $\ddot{a} < 0$ e supponiamo che l'universo sia in espansione, ossia $\dot{a} > 0$.

Sotto l'assunzione del principio cosmologico, la relatività generale prevede che ad un tempo minore di $H^{-1} = a\dot{a} \simeq 4.35 \cdot 10^{17} s$, detto **Tempo di Hubble** l'universo era in uno *stato singolare*.

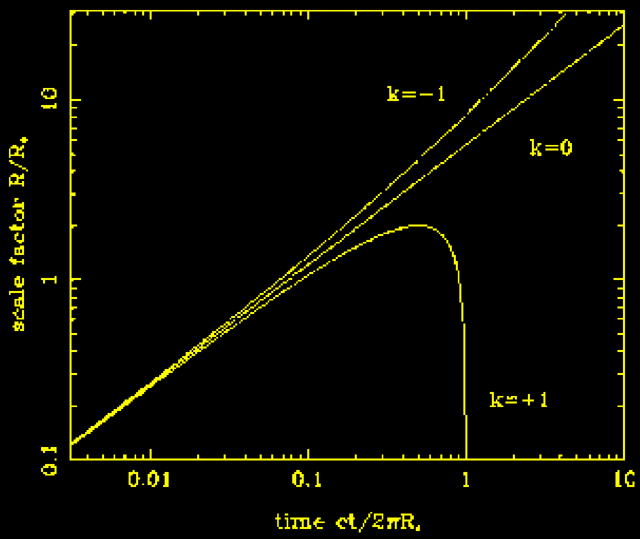
- la distanza fra *tutti i punti dello spazio* era **nulla**;
- la densità di materia e la curvatura dello spaziotempo erano **infinite**

Questo stato di **singolarità** prende il nome di Big Bang.

$\longrightarrow$ *Evoluzione dell'universo*

Osserviamo che:

- Se $k = 0$ o $k = -1$, $\dot{a}$ non può mai diventare nulla. Allora, se l'universo si sta espandendo, dovrà continuare a farlo per sempre.
  - se $k = 0$, la velocità di espansione $\dot{a}$ tende asintoticamente a zero quando $\tau \longrightarrow \infty$
  - se invece $k = -1$ abbiamo $\dot{a} \longrightarrow 1$ quando $\tau \longrightarrow \infty$.
- se $k = +1$, l'universo non può espandersi per sempre:
  - l'universo, in un tempo finito dopo il Big Bang, raggiungerà una dimensione massima per poi tornare a contrarsi.
  - per gli stessi motivi, dopo aver iniziato la contrazione, in un tempo finito arriverà ad un Big Crunch.



Andiamo ora a risolvere le equazioni generali per il caso di materia e radiazione. Il metodo più efficiente per farlo è di eliminare il termine ρ. Otteniamo,

$$\dot{a}^2 - C/a + k = 0, \quad \text{con}$$

$$\begin{cases} C = 8\pi\rho a^3/3, & \text{per la materia} \\ C = C' = 8\pi\rho a^4/3, & \text{per la radiazione} \end{cases}$$

$\longrightarrow$ *Conclusioni*

Tutte le considerazioni fatte finora, portano al seguente quadro dell'evoluzione dell'universo.
Esso nacque come una caldissima ($T \longrightarrow \infty$), densa ($\rho \longrightarrow \infty$) *zuppa* di materia e radiazione in equilibrio termico. Tuttavia, con il suo evolversi, questo equilibrio non è stato mantenuto. Inizialmente, l'energia contenuta nell'universo primordiale era dominata dalla radiazione; tuttavia, dal momento in cui $a(\tau)$ raggiunse circa la millesima parte del suo presente valore, il contributo della materia ordinaria dominò l'energia contenuta nell'universo, e la sua dinamica divenne quella di un modello di materia Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker.

Equazioni di Friedmann

$$\dot{R} = \left[R^2\,\frac{8\pi G\rho + \Lambda c^2}{3} - k c^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right)R + \frac{\Lambda c^2}{3}R$$

Aleksandr Aleksandrovič Fridman

(San Pietroburgo, 6 giugno 1888 – Pietrogrado, 16 settembre 1925)

R = Raggio dell'Universo (fattore di scala)

$\dot{R}$ = Velocità di espansione

$\ddot{R}$ = Accelerazione dell'espansione

ρ = Densità media della materia

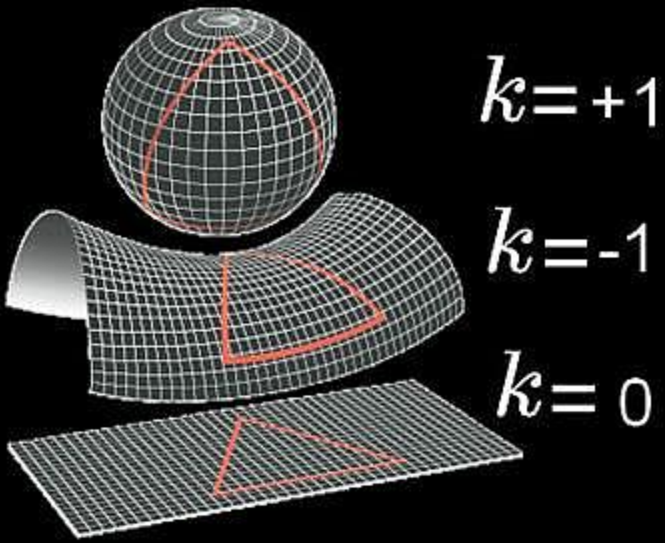
p = Pressione

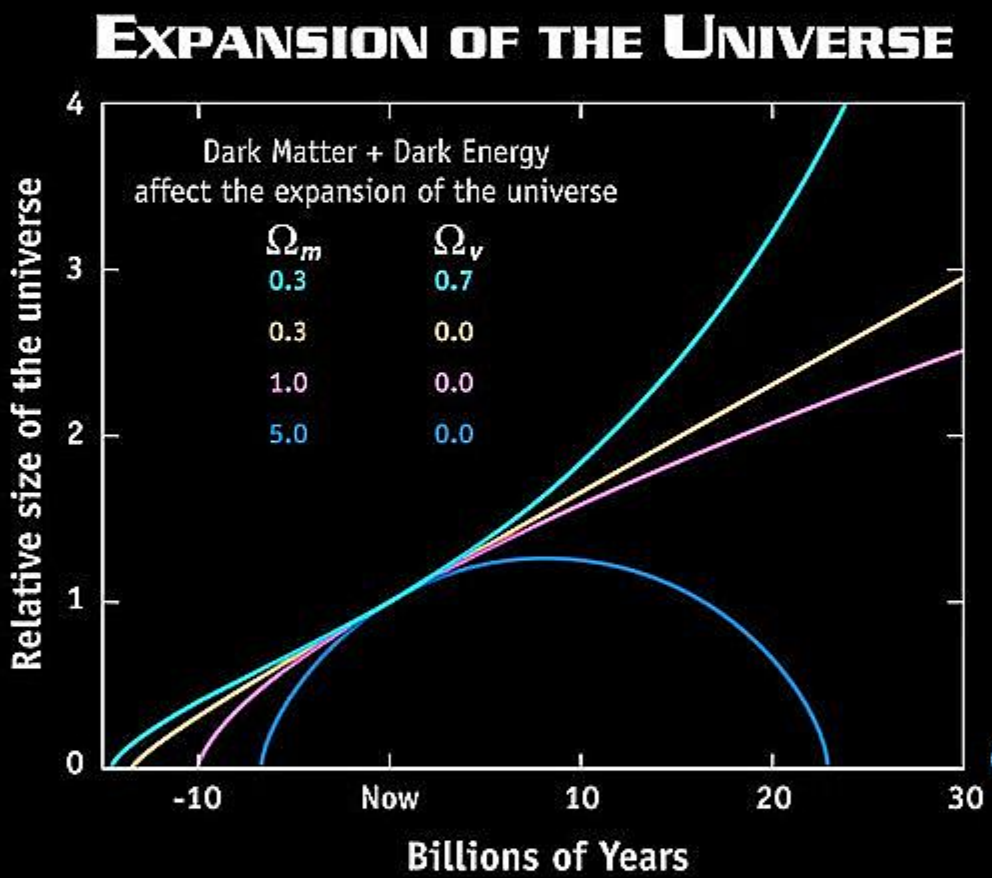
c = Velocità della luce

G = Costante di Gravitazione Universale

Λ = Costante cosmologica

k = Parametro di curvatura



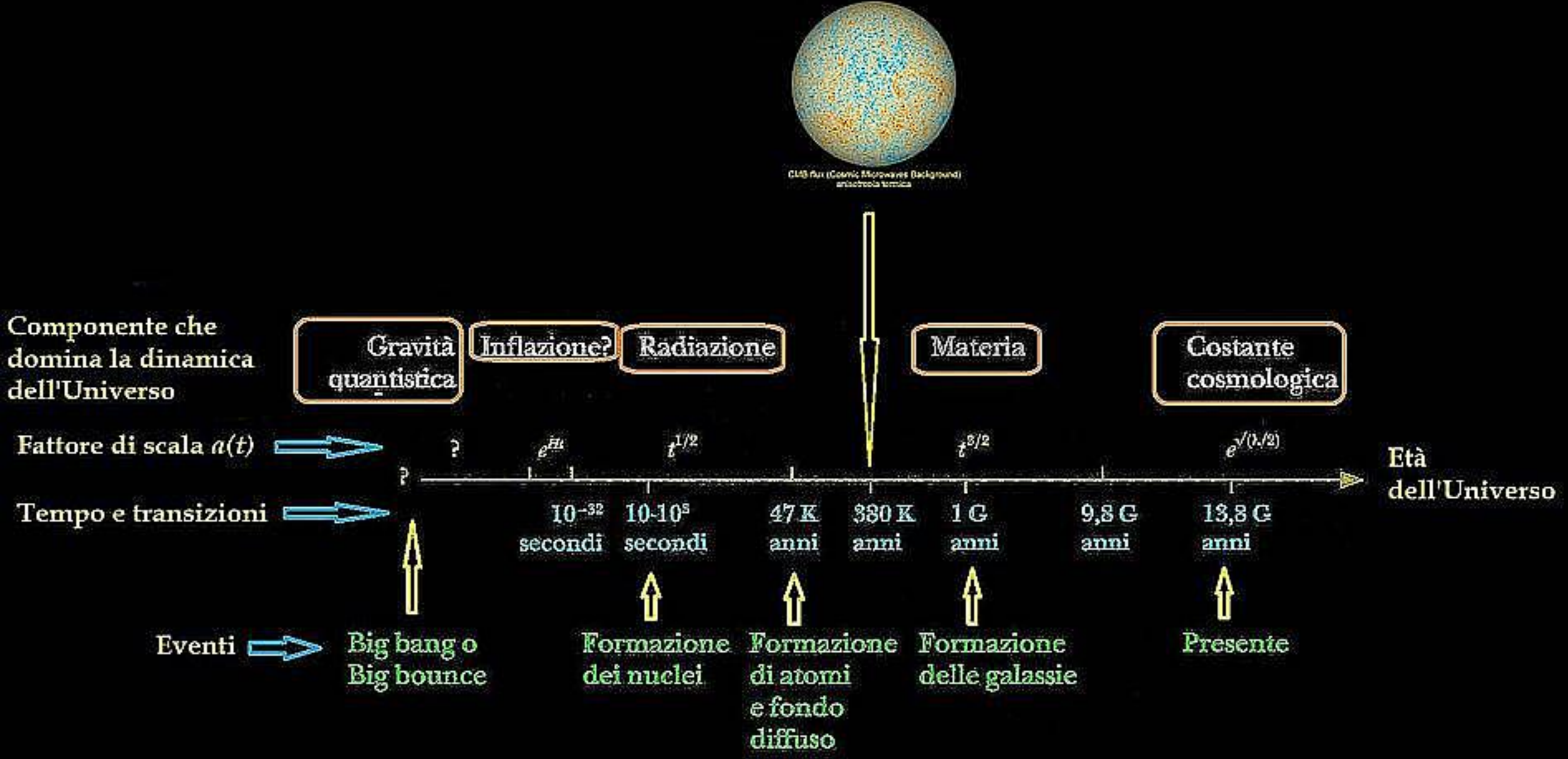


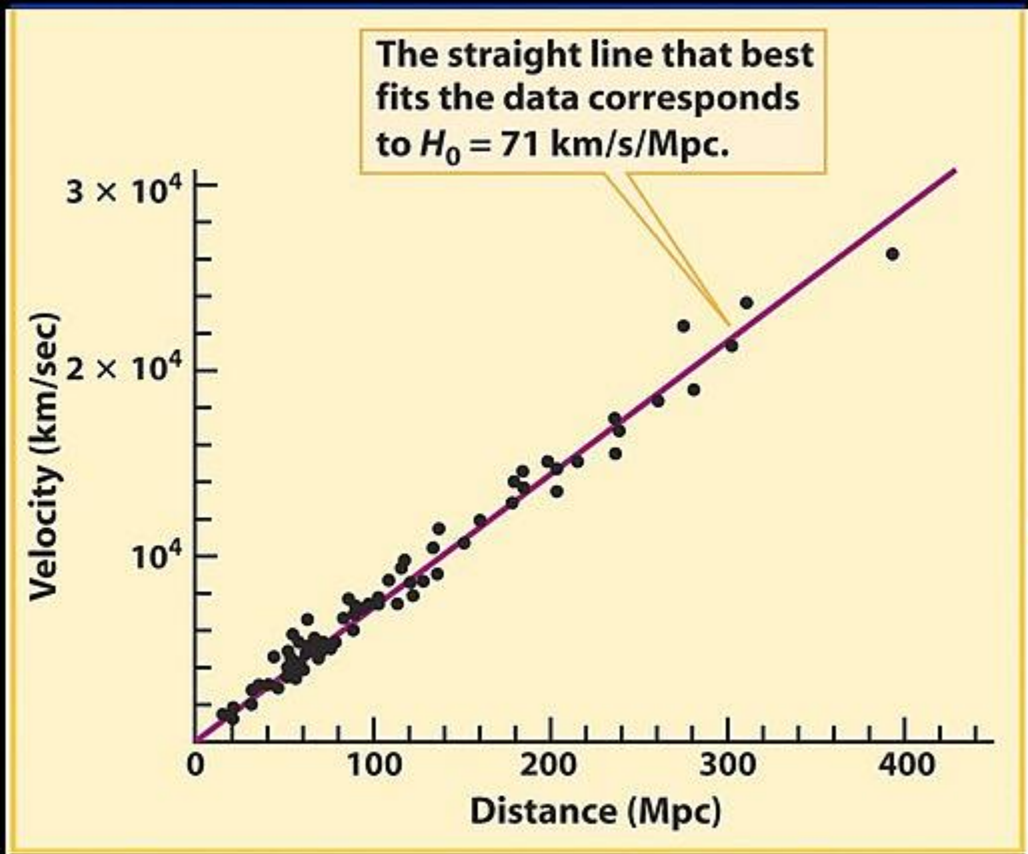
IN UN UNIVERSO COMPLETAMENTE DOMINATO DALLA MATERIA L'ESPANSIONE E' REGOLATA DAL RAPPORTO TRA LA DENSITA' CRITICA (ρ_C) E LA DENSITA OSSERVATA (ρ)

$$\Omega = \rho / \rho_c$$

RECENTI OSSERVAZIONI SEMBRANO CONFERMARE CHE CIRCA IL 70% DELL'UNIVERSO SIA COSTITUITO DA UNA STRANA FORMA DI ENERGIA CHE NE ACCELERA L'ESPANSIONE

Evoluzione dell'Universo:





NEL 1929 EDWIN HUBBLE SCOPRE L'ESISTENZA DI UNA RELAZIONE LINEARE TRA IL REDSHIFT E LA DISTANZA DELLE GALASSIE.

LE GALASSIE SI ALLONTANANO RECIPROCAMENTE AD UNA VELOCITA' PROPORZIONALE ALLA LORO DISTANZA

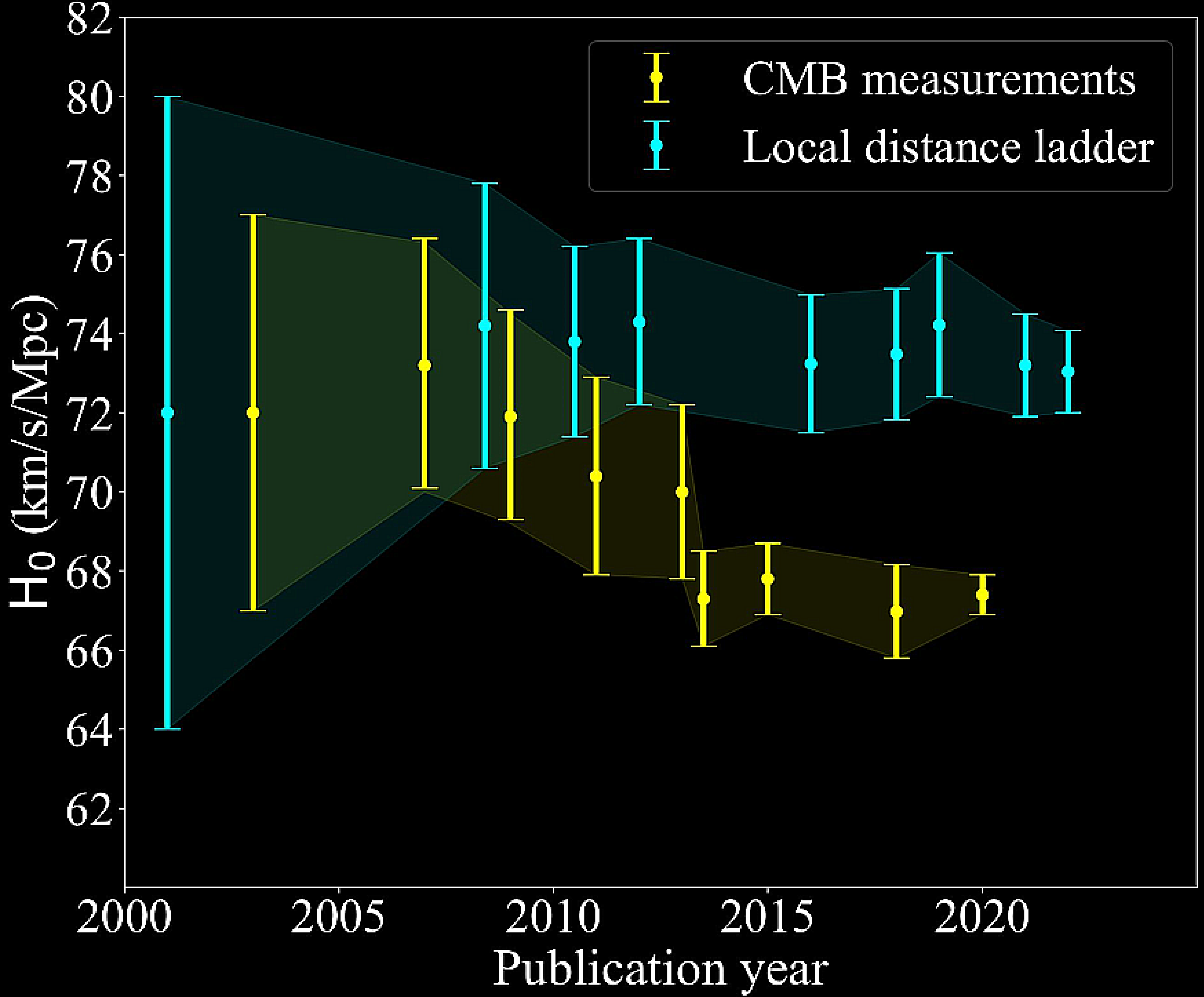
LEGGE DI HUBBLE

$$v = H_0 D$$

COSTANTE DI HUBBLE

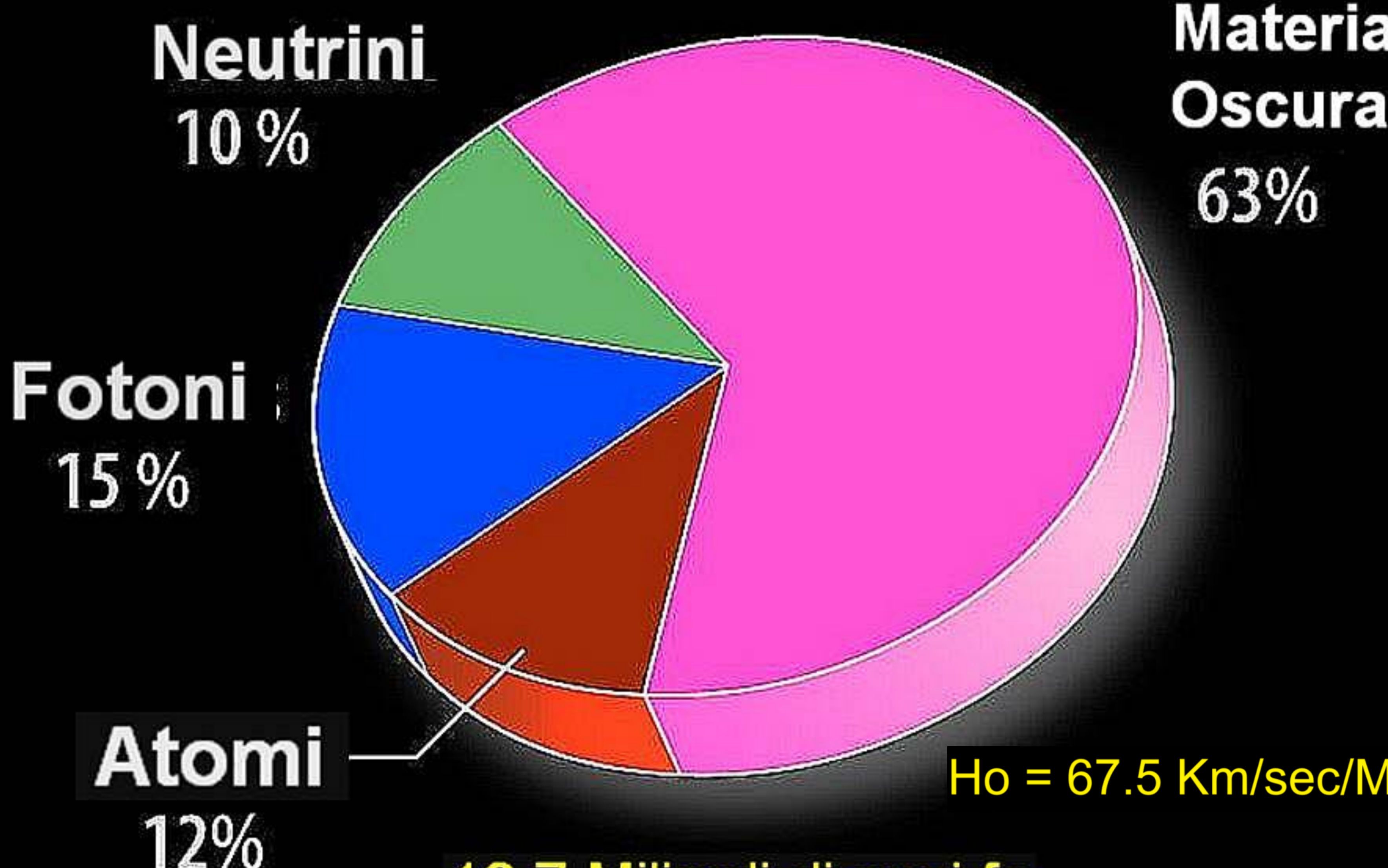
$$H_0 = 71\ (\mathrm{Km/s})/\mathrm{Mpc}$$

Tensione di Hubble



Ho = 73 Km/sec/Mpc

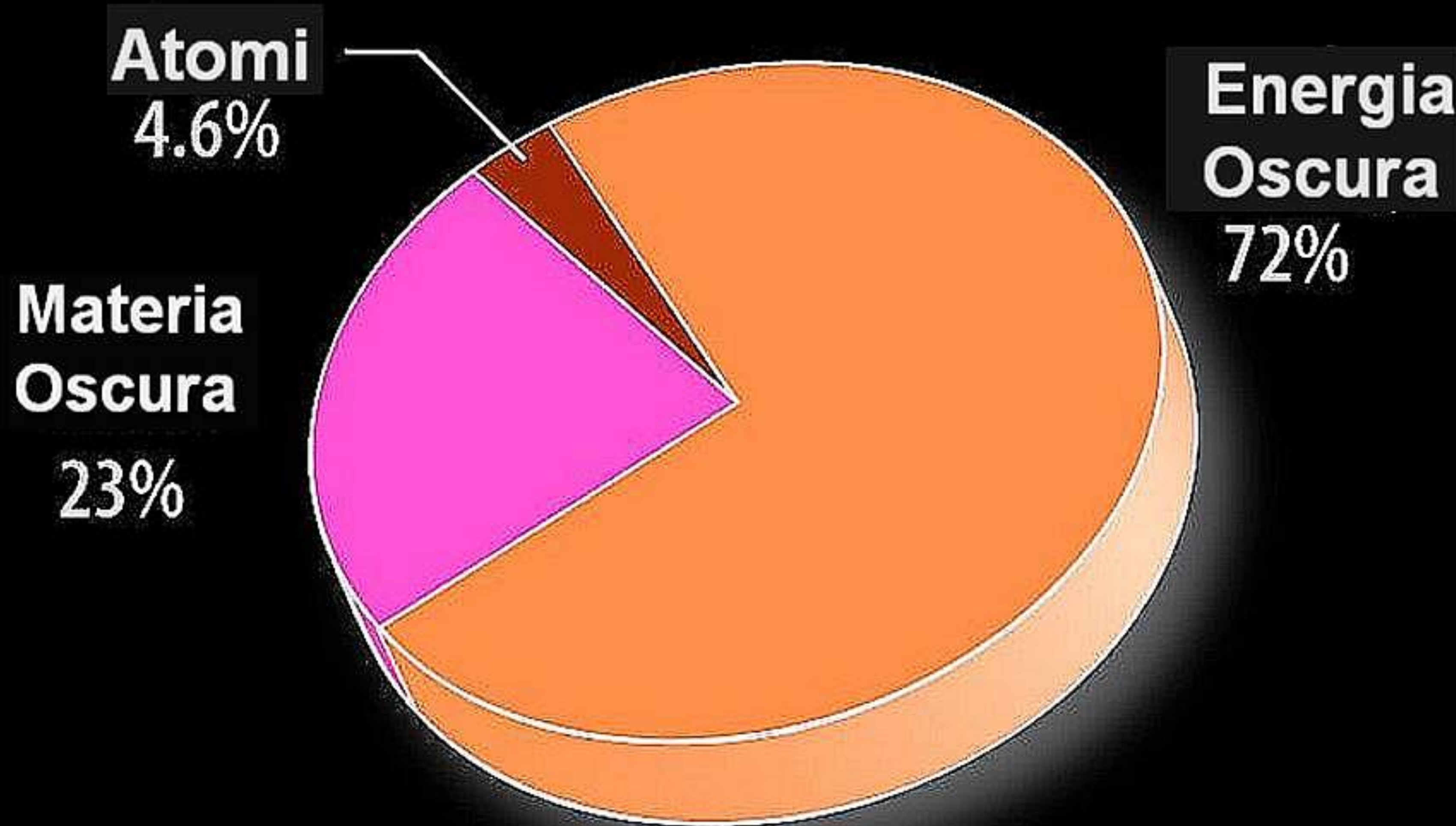
Ho = 67.5 Km/sec/Mpc



Ho = 67.5 Km/sec/Mpc

13,7 Miliardi di anni fa

(età dell'Universo: 380.000 anni)



Oggi

Ho = 73 Km/sec/Mpc

Tensione di Hubble

$H_o = 67.5 + 0.404 \cdot t$ Km/sec/Mpc

t = età dell'Universo (Gy)

Grazie per
l'attenzione!